山口大学

2013年 工・理・教育 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ xy 平面において，曲線 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ と $y=\dfrac{x^2}{2}$ の原点以外の交点をPとする．また，この2つの曲線で囲まれた図形を D とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 点Pの座標を求めなさい．

(2) D の面積を求めなさい．

(3) D を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めなさい．

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x^2}{2}$ とおくと

$$f(x)=\frac{2x-x^2(x^2+1)}{2(x^2+1)}$$

$$=\frac{-x(x-1)(x^2+x+2)}{2(x^2+1)}$$

$x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$ より．

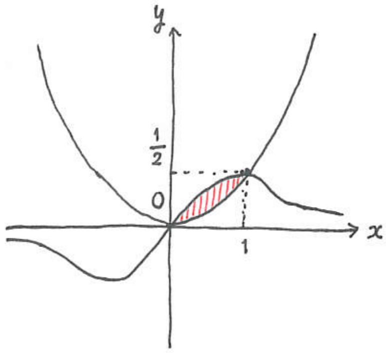
$f(x)=0$ となるのは．$x=0,1$

∴ Pは原点以外の交点より，$\underline{P\left(1,\frac{1}{2}\right)}$ //

(2) (1)より．$f(x)=-\dfrac{x(x-1)(x^2+x+2)}{2(x^2+1)}$ なので，

$0\leqq x\leqq 1$ において．$f(x)\geqq 0$

すなわち $\dfrac{x}{x^2+1}\geqq\dfrac{x^2}{2}$ $(0\leqq x\leqq 1)$



↑ 正確なグラフをかかなくても (2)，(3)は解ける．

$$\therefore \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}-\frac{x^2}{2}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}-\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\log|x^2+1|-\frac{x^3}{6}\right]_0^1$$

$$=\underline{\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{6}}\ //$$

(3)
$$\pi\int_0^1\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2-\left(\frac{x^2}{2}\right)^2dx=\pi\int_0^1\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx-\pi\int_0^1\frac{x^4}{4}dx$$

$x=\tan\theta$ とおいて置換積分 $\begin{array}{c|c} x & 0\to 1 \\ \theta & 0\to\frac{\pi}{4}\end{array}$，$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\cdot d\theta-\pi\left[\frac{x^5}{20}\right]_0^1$$

$$=\pi\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{20}$$

$$=\pi\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)-\frac{\pi}{20}$$

$$=\underline{\frac{\pi^2}{8}-\frac{3}{10}\pi}\ //$$