



2013年工学部第4問

4 行列

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} p & -2 \\ 1 & q \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

が $AB = BJ$ を満たすとき、次の問いに答えよ。ただし、 p, q は定数であり、以下で用いる n は自然数である。

(1) p, q の値を求めよ。

(2) $J^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を示せ。

(3) $A^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1+2n & -2n \\ 2n & 1-2n \end{pmatrix}$ を示せ。

(4) 行列 A^n の表す 1 次変換により、 xy 平面上の点 $(p, 1), (-2, q)$ が、それぞれ点 P_n, Q_n に移される。原点を O として、 \vec{OP}_n と \vec{OQ}_n のなす角を θ_n とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \theta_n$ を求めよ。