山形大学

2015年 人文学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 原点をOとする座標平面上に放物線 $y = x^2$ がある．この放物線上に2点 $A(a,\ a^2)$，$B(b,\ b^2)$ があり，$a > 0$，$b < 0$ であるとする．$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{AB}$ が垂直であるとき，次の問に答えよ．

(1) b を a を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{AB}|$ と $\triangle OAB$ の面積を a を用いて表せ．

(3) $|\overrightarrow{OB}| = 3\sqrt{10}$ のとき，点Bの座標と a を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AB} = (b-a,\ b^2-a^2)$ なので，$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$ より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB} = a(b-a) + a^2(b^2-a^2)$$
$$= (b-a)\cdot a\cdot(a^2+ab+1)$$

$b-a<0$，$a>0$ より，$a^2+ab+1=0$ $\quad\therefore \underline{b = -a-\frac{1}{a}}$ //

(2) $$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}$$
$$= \sqrt{(b-a)^2\{1+(b+a)^2\}}$$
$$= \sqrt{\left(-2a-\frac{1}{a}\right)^2\left(1+\frac{1}{a^2}\right)}$$
$$= \left(2a+\frac{1}{a}\right)\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2}}$$
$$= \left(\frac{1}{a^2}+2\right)\sqrt{a^2+1}$$
$$= \underline{\frac{(2a^2+1)\sqrt{a^2+1}}{a^2}}\ //$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{AB}|$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2+a^4}\cdot\frac{(2a^2+1)\sqrt{a^2+1}}{a^2}$$
$$= \underline{\frac{1}{2}\left(2a+\frac{1}{a}\right)(a^2+1)}\ //$$

(3) $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{b^2+b^4} = 3\sqrt{10}$

$\therefore\ b^4+b^2-90=0$

$\therefore\ (b^2+10)(b^2-9)=0$

$b<0$ より，$b=-3$ $\quad\therefore \underline{B(-3,\ 9)}$ //

(1) より，$-3 = -a-\frac{1}{a}$ $\quad\therefore\ a^2-3a+1=0$ $\quad\therefore \underline{a = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$ //