山形大学

2015年 理学部（数理） 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 座標平面上の点$(\sqrt{3},\ 0)$をA，点$(-\sqrt{3},\ 0)$をBとする．点$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$が楕円$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$上にあり，$x_1>0,\ y_1>0$とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$を$x_1$を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$の値を求めよ．

(3) 楕円上の点Pにおける接線ℓの方程式を求めよ．

(4) 直線ℓの法線ベクトルの1つを$\vec{n}$とおく．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$と$\vec{n}$のなす角は$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$と$\vec{n}$のなす角に等しいことを示せ．

(1) Pは楕円上の点より，$\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$ … ①

$x_1>0$より

$$\therefore |\overrightarrow{BP}|=\sqrt{(x_1+\sqrt{3})^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2+2\sqrt{3}x_1+3+1-\frac{x_1^2}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}x_1^2+2\sqrt{3}x_1+4}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+2\right)^2}=\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+2}\ //$$

(2) (1)と同様にして，

$0<x_1<2$より

$$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(x_1-\sqrt{3})^2+y_1^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1-2\right)^2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+2$$

$$\therefore |\overrightarrow{AP}|+|\overrightarrow{BP}|=-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+2+\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+2=\underline{4}\ //$$

(3) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ より，両辺xで微分して，$\dfrac{x}{2}+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$　$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{4y}$　($\because y>0$)

$$\therefore \ell:\ y=-\frac{x_1}{4y_1}(x-x_1)+y_1 \iff 4y_1y=-x_1x+x_1^2+4y_1^2$$

$$\iff \frac{x_1x}{4}+y_1y=\frac{x_1^2}{4}+y_1^2$$

$$\iff \underline{\frac{x_1x}{4}+y_1y=1}\ //\quad (\because ①より)$$

(4) 法線ベクトルの1つとして，$\vec{n}=\left(\dfrac{x_1}{4},\ y_1\right)$ととると，$\overrightarrow{AP}=(x_1-\sqrt{3},\ y_1)$，$\overrightarrow{BP}=(x_1+\sqrt{3},\ y_1)$なので

$\overrightarrow{AP}$と$\vec{n}$のなす角をα，$\overrightarrow{BP}$と$\vec{n}$のなす角をβ ($0\leqq\alpha\leqq\pi,\ 0\leqq\beta\leqq\pi$) とおくと

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AP}||\vec{n}|}=\frac{\frac{1}{4}x_1^2-\frac{\sqrt{3}}{4}x_1+y_1^2}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+2\right)|\vec{n}|}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{4}x_1}{2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}x_1\right)|\vec{n}|}=\frac{1}{2|\vec{n}|}$$

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{BP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{BP}||\vec{n}|}=\frac{\frac{1}{4}x_1^2+\frac{\sqrt{3}}{4}x_1+y_1^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+2\right)|\vec{n}|}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{4}x_1}{2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}x_1\right)|\vec{n}|}=\frac{1}{2|\vec{n}|}$$

$\therefore\ 0\leqq\alpha\leqq\pi,\ 0\leqq\beta\leqq\pi$ かつ $\cos\alpha=\cos\beta$ より，$\alpha=\beta$

すなわち，$\overrightarrow{AP}$と$\vec{n}$のなす角は$\overrightarrow{BP}$と$\vec{n}$のなす角に等しい ■