0002103546987999

山形大学

2015年 医学部 第2問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ について，次の問に答えよ．ただし，a_1，a_2，a_3 は負の実数とする．

(1) $f'(x)=0$ は正の実数解と負の実数解を1つずつもつことを示せ．
$f'(x)=0$ の正の実数解を α，負の実数解を β とおくとき，$-\alpha<\beta$ を示せ．

(2) $f(x)=0$ の正の実数解は，ただ1つであることを示せ．

(3) $f(x)+f(-x)<0$ を示せ．

(4) $f(x)=0$ の正の実数解を p とおく．$x\leqq -p$ のとき，$f(x)<0$ を示せ．

(5) b_1，b_2，b_3，b_4 を負の実数とする．関数 $g(x)=x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4$ に対し，$g(x)=0$ の正の実数解は，ただ1つであることを示せ．$x<0$ のとき，$g(x)-g(-x)>0$ を示せ．$g(x)=0$ の正の実数解を q とおく．$x\leqq -q$ のとき，$g(x)>0$ を示せ．

(1) $f'(x)=3x^2+2a_1x+a_2$

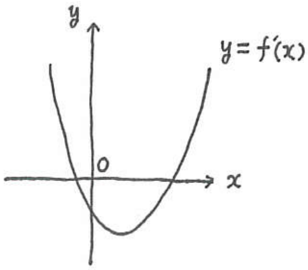
$f'(x)=0$ の判別式を D とおくと

$D/4=a_1^2-3a_2>0$ $(\because a_2<0)$

よって，$f'(x)=0$ は異なる2つの実数解をもつ

また，$f'(0)=a_2<0$ $(\because a_2<0)$ であることから

$y=f'(x)$ のグラフは右のようになる．



$\therefore$ $f'(x)=0$ は正の実数解と負の実数解を1つずつもつ ▨

次に，軸の方程式は，a_1 を用いて，$x=-\dfrac{a_1}{2}>0$ $(\because a_1<0)$ であり，

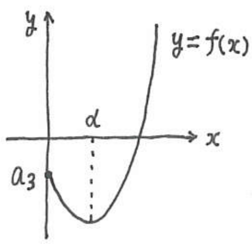
これは，α,β を用いると，$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ となるので，$\alpha+\beta>0$　すなわち，$-\alpha<\beta$ ▨

(2) (1)より，増減表は右のようになる

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	a_3	↘		↗

$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \\ f(0)=a_3<0 \end{cases}$ より グラフは右下のようになる．

$\therefore$ $f(x)=0$ の正の実数解は，ただ1つである ▨



(3) $f(x)+f(-x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3+(-x)^3+a_1(-x)^2+a_2(-x)+a_3$

$=2a_1x^2+2a_3$

ここで，$2a_1x^2<0$，$2a_3<0$ $(\because a_1,a_3<0)$ であるから，

$f(x)+f(-x)<0$ ▨

2枚目へつづく

0002103546987999

山形大学

2015年 医学部 第2問　　**2枚目/2枚**

数理 石井K

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ について，次の問に答えよ．ただし，a_1，a_2，a_3 は負の実数とする．

(1) $f'(x)=0$ は正の実数解と負の実数解を 1 つずつもつことを示せ．
$f'(x)=0$ の正の実数解を α，負の実数解を β とおくとき，$-\alpha<\beta$ を示せ．

(2) $f(x)=0$ の正の実数解は，ただ 1 つであることを示せ．

(3) $f(x)+f(-x)<0$ を示せ．

(4) $f(x)=0$ の正の実数解を p とおく．$x\leqq -p$ のとき，$f(x)<0$ を示せ．

(5) b_1，b_2，b_3，b_4 を負の実数とする．関数 $g(x)=x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4$ に対し，$g(x)=0$ の正の実数解は，ただ 1 つであることを示せ．$x<0$ のとき，$g(x)-g(-x)>0$ を示せ．$g(x)=0$ の正の実数解を q とおく．$x\leqq -q$ のとき，$g(x)>0$ を示せ．

(4) (2)のグラフより，$x\geqq p$ において $f(x)\geqq 0$

ここで，$t=-x$ とおくと，$-t\geqq p$ において，$f(-t)\geqq 0$

すなわち，$t\leqq -p$ において，$f(-t)\geqq 0$ …①

また，(3)より，$f(t)+f(-t)<0 \iff f(t)<-f(-t)$ …②

①，②より，$x\leqq -p$ のとき，$f(x)<-f(-x)\leqq 0$ すなわち $f(x)<0$ ▨

(5) $g'(x)=4x^3+3b_1x^2+2b_2x+b_3$

$=4\left(x^3+\frac{3}{4}b_1x^2+\frac{1}{2}b_2x+\frac{1}{4}b_3\right)$

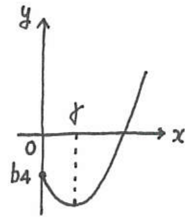
$\therefore\ a_1=\frac{3}{4}b_1$，$a_2=\frac{1}{2}b_2$，$a_3=\frac{1}{4}b_3$ とすると，$a_1, a_2, a_3<0$ となり，(1)～(3)の結果が利用できる．

(2)より，$g'(x)=0$ の正の実数解は，ただ1つである．この解を γ とする

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$，$g(0)=b_4<0$ と右の増減表より

$g(x)=0$ の正の実数解は，ただ1つである ▨

x	0	…	γ	…
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	b_4	↘		↗



$g(-x)=x^4-b_1x^3+b_2x^2-b_3x+b_4$ より，

$g(x)-g(-x)=2b_1x^3+2b_3x=2x(b_1x^2+b_3)$

$x<0$ のとき，$b_1x^2+b_3<0$ ($\because b_1, b_3<0$) であるから，$g(x)-g(-x)>0$ ▨

グラフより，$x\geqq q$ において，$g(x)\geqq 0$

ここで，$t=-x$ とおくと，$t\leqq -q$ において，$g(-t)\geqq 0$ …③

$g(x)-g(-x)>0$ より，$g(t)>g(-t)$ …④

③，④より，$x\leqq -q$ のとき，$g(x)>0$ ▨