山形大学

2016年 工学部 第2問

$\boxed{2}$ すべての実数 x に対して微分可能な関数 $f(x)$ が等式

$$e^{-x}f(x)+\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt=1+e^{-2x}(3\sin x-\cos x)$$

を満たすとき，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) $f(0)$ を求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(3) $e^{-x}\sin x$ の導関数を求めよ．さらに，$f(x)$ を求めよ．

(1) 与式に $x=0$ を代入して.

$$f(0)=1+(0-1)=\underline{0}\ _{//}$$

(2) 両辺を x で微分して.

$$-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)+e^{-x}f(x)=-2e^{-2x}(3\sin x-\cos x)+e^{-2x}(3\cos x+\sin x)$$

$$\therefore\ e^{-x}f'(x)=e^{-2x}(5\cos x-5\sin x)$$

両辺を $e^{-x}\,(>0)$ でわって. $\underline{f'(x)=5e^{-x}(\cos x-\sin x)}\ _{//}$

(3) $(e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$

$$=\underline{e^{-x}(\cos x-\sin x)}\ _{//}$$

$\therefore$ (2) より. $f'(x)=5\,(e^{-x}\sin x)'$

$$=(5e^{-x}\sin x)'$$

$$\therefore\ f(x)=5e^{-x}\sin x+C_1\quad(C_1\text{ は積分定数})$$

(1) より $f(0)=0$ であるから $C_1=0$

$$\therefore\ \underline{f(x)=5e^{-x}\sin x}\ _{//}$$