2018年 工学部 第4問

4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1,\ \ a_2 = \pi,\ \ a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a_{n+1}x + \frac{\pi}{2}a_n\right)\cos x\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義するとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1$ を示せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} + a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める．$\{b_n\}$ は等比数列であることを示し，その一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{n+1} - \dfrac{\pi}{2}a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める．$\{c_n\}$ は等比数列であることを示し，その一般項を求めよ．

(4) (2)と(3)の結果を用いて，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ の値を求めよ．