2011 年 理系 第 4 問

$\boxed{4}$ 平面上で，線分 AB を 1：2 に内分する点を O とし，O を中心とする半径 OB の円を S，円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする．点 P は円 S の内部にあり，線分 BC 上にないものとする．円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{b}$，$\angle\mathrm{APB} = \theta$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

(2) 点 P が円 S の内部にあることを用いて，$\cos\theta < \dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ．

(3) PQ の長さを $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，θ で表せ．

(4) $\mathrm{PA} = 3$，$\mathrm{PB} = 2$ とする．$\triangle\mathrm{QAB} = 3\triangle\mathrm{POB}$ を満たすとき，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積を求めよ．