0001839540618999

# 山形大学

2014年 理学部（物理）第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ $-a < x < a$ で定義された曲線 $C : y = x\sqrt{a^2 - x^2}$ がある．ただし $a$ は正の定数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $y$ の増減を調べ，曲線 $C$ の概形をかけ．

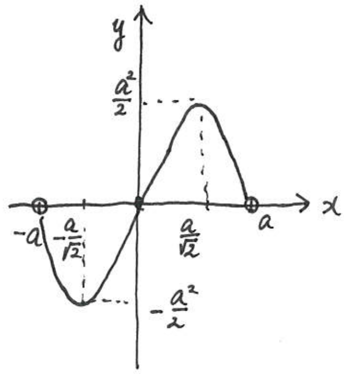
(2) 曲線 $C$ と直線 $L : y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ が3つの共有点を持つような定数 $a$ の値の範囲を求めよ．またそのときの共有点の $x$ 座標をすべて求めよ．

(3) 3つの共有点のうち，$x$ 座標の値が最も大きい点をPとする．点Pにおける曲線 $C$ の接線と，直線 $L$ および $y$ 軸で囲まれる三角形が正三角形になるときの定数 $a$ の値を求め，その正三角形の面積を求めよ．

(1) $y' = \sqrt{a^2-x^2} + x\cdot\dfrac{(-\frac{1}{2})\cdot 2x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$\therefore$ $y'=0$ となるのは、$x = \pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

| $x$ | $(-a)$ | $\cdots$ | $-\frac{a}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$ | $\frac{a}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$ | $(a)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $(0)$ | ↘ | $-\frac{a^2}{2}$ | ↗ | $\frac{a^2}{2}$ | ↘ | $(0)$ |
| | | | 極小 | | 極大 | | |




(2) CとLは原点を共有点としてもち、ともに原点に関して対称なので、$0<x<a$ に共有点を1つもてばよい。

$\therefore$ $x\sqrt{a^2-x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}x = 0$

$x\left(\sqrt{a^2-x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$

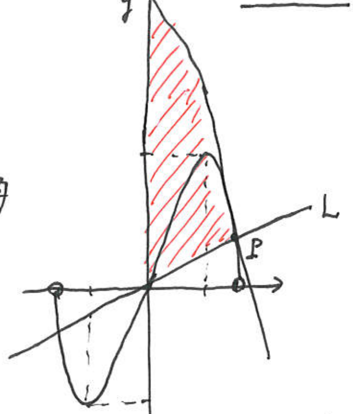
$\therefore$ $\sqrt{a^2-x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0$ が $0<x<a$ に 1つ解をもてばよい

$\therefore$ $x = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}}$

$\therefore$ $0 < \sqrt{a^2-\frac{1}{3}} < a$　　$\therefore$ $a > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

また、このときの共有点の $x$ 座標は

$x = \pm\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}$ , $0$




(3) Lとy軸のなす角は60°なので、接線とy軸のなす角も60°になれば、正三角形となる。

$\therefore$ 接線は、$y = \dfrac{-3a^2+2}{\sqrt{3}}\left(x - \sqrt{a^2-\frac{1}{3}}\right) + \sqrt{\dfrac{a^2-\frac{1}{3}}{3}}$ より

$\dfrac{-3a^2+2}{\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　$\therefore$ $3a^2-2=1$　$a>0$ より $a=1$

このとき $P\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

このとき、$OP = \sqrt{\dfrac{6}{9}+\dfrac{2}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　$\therefore$ $S = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$