香川大学

2016年 教育学部・農学部 第4問

4 座標平面上の放物線 $C : y = \frac{1}{2}x^2$ に対し，次の問に答えよ．

(1) 半径 r の円が放物線 C と2点で接するとき，円の中心と2つの接点の座標を r を用いて表せ．

(2) 点 $(0,\ 1)$ を中心とする半径1の円を C_1 とする．$n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対し円 C_n を，放物線 C と2点で接し，円 C_{n-1} と外接するものとする．このとき，円 C_n の半径を n を用いて表せ．

(1) 円の中心を (p, q) とおくと円の方程式は，

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

これに $y=\frac{1}{2}x^2$ を代入して，

$$x^2-2px+p^2+\frac{1}{4}x^4-qx^2+q^2=r^2$$

$$\therefore\ \frac{1}{4}x^4+(1-q)x^2-2px+p^2+q^2-r^2=0 \quad \cdots①$$

これが $x=\alpha, \beta$ をそれぞれ重解としてもてばよい（ただし，$\alpha<\beta$）

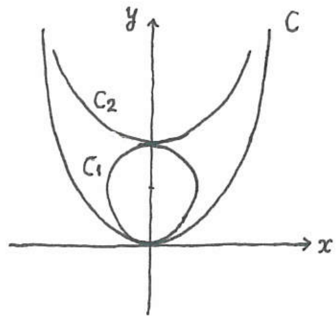
$$\therefore\ ①\text{の左辺は，}\ \frac{1}{4}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^3+\frac{1}{4}(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x^2-\frac{1}{2}\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\frac{1}{4}\alpha^2\beta^2 \cdots ②$$

と表される．①と②の各係数を比較して，

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \frac{1}{4}(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)=1-q \\ -\frac{1}{2}\alpha\beta(\alpha+\beta)=-2p \\ \frac{1}{4}\alpha^2\beta^2=p^2+q^2-r^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha^2=2q-2 \\ p=0 \\ \frac{1}{4}\alpha^4=q^2-r^2 \end{cases} \iff \begin{cases} p=0 \\ q=\frac{1}{2}(r^2+1) \\ \alpha=-\sqrt{r^2-1} \\ \beta=\sqrt{r^2-1} \end{cases}$$

以上より，円の中心は $\left(0, \frac{r^2+1}{2}\right)$，接点は $\left(\pm\sqrt{r^2-1}, \frac{r^2-1}{2}\right)$ //

(2) 円 C_n の半径を r_n とおくと，(1)の α, β の存在条件より，$r_n \geqq 1$



(C_n と C_{n+1} の中心間のキョリ) $= r_n + r_{n+1}$ ← C_n と C_{n+1} が接するので

$$\therefore\ \frac{1}{2}(r_{n+1}^2+1)-\frac{1}{2}(r_n^2+1)=r_n+r_{n+1}$$

(1)の q の値を使った．これは $n=1$ のときも成り立っている．

$$\therefore\ \frac{1}{2}(r_{n+1}+r_n)(r_{n+1}-r_n-2)=0$$

$r_n>0$，$r_{n+1}>0$ より，$r_{n+1}=r_n+2$

$\therefore\ \{r_n\}$ は初項1，公差2の等差数列より，

$$r_n=2n-1$$ //