0000204635979999

岡山県立大学

2011 年 第 3 問

数理 石井K

$\boxed{3}$ aを実数とする．曲線 $y=\frac{1}{4}(x-a)^2$ と曲線 $y=e^x$ の共有点 P(s, t) において 2 曲線の接線が一致するとき，以下の問いに答えよ．

(1) aの値を求めよ．また，そのときの点 P における接線の方程式を求めよ．

(2) $x \geqq a$ のとき $\dfrac{(x-a)^2}{e^x}$ の最大値を求めよ．

(1) $f(x)=\frac{1}{4}(x-a)^2$, $g(x)=e^x$ とおくと．P において接線が一致することより．

$f(s)=g(s)$ かつ $f'(s)=g'(s)$

ここで，$f'(x)=\frac{1}{2}(x-a)$，$g'(x)=e^x$ より

$\frac{1}{4}(s-a)^2=e^s$ かつ $\frac{1}{2}(s-a)=e^s$

$\therefore \frac{1}{4}(s-a)^2=\frac{1}{2}(s-a) \iff (s-a)(s-a-2)=0$

ここで，$\frac{1}{2}(s-a)=e^s>0$ より $s-a\neq 0$ $\therefore s=a+2$

このとき $e^s=1$ $\therefore s=0, t=1$ $\therefore$ P$(0, 1)$

$\therefore \underline{a=-2}$ // このとき接線は $\underline{y=x+1}$ //

(1)でaの値を求めているので．最初から代入しておいてもよい．

(2) $h(x)=\dfrac{(x-a)^2}{e^x}$ とおくと，$h'(x)=\dfrac{2(x-a)e^x-(x-a)^2e^x}{e^{2x}}=\dfrac{-(x-a)(x-a-2)}{e^x}$

$\therefore h'(x)=0$ となるのは $x=a, a+2$ のとき．

x	a	$\cdots$	$a+2$	$\cdots$
$h'(x)$	0	+	0	−
$h(x)$	0	↗	$\frac{4}{e^{a+2}}$	↘

極大

右の増減表より

最大値は $\dfrac{4}{e^{a+2}}=\underline{4\ (x=0\text{ のとき})}$ //