



2016年理系第3問

3 複素数平面上を、点  $P$  が次のように移動する。

- (i) 時刻 0 では、 $P$  は原点にいる。時刻 1 まで、 $P$  は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の  $P$  の位置を  $Q_1(z_1)$  とすると、 $z_1 = 1$  である。
- (ii) 時刻 1 に  $P$  は  $Q_1(z_1)$  において進行方向を  $\frac{\pi}{4}$  回転し、時刻 2 までその方向に速さ  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  で移動する。移動後の  $P$  の位置を  $Q_2(z_2)$  とすると、 $z_2 = \frac{3+i}{2}$  である。
- (iii) 以下同様に、時刻  $n$  に  $P$  は  $Q_n(z_n)$  において進行方向を  $\frac{\pi}{4}$  回転し、時刻  $n+1$  までその方向に速さ  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$  で移動する。移動後の  $P$  の位置を  $Q_{n+1}(z_{n+1})$  とする。ただし  $n$  は自然数である。

$\alpha = \frac{1+i}{2}$  として、次の問いに答えよ。

- (1)  $z_3, z_4$  を求めよ。
- (2)  $z_n$  を  $\alpha, n$  を用いて表せ。
- (3)  $P$  が  $Q_1(z_1), Q_2(z_2), \dots$  と移動するとき、 $P$  はある点  $Q(w)$  に限りなく近づく。 $w$  を求めよ。
- (4)  $z_n$  の実部が (3) で求めた  $w$  の実部より大きくなるようなすべての  $n$  を求めよ。