0001691098038999

金沢大学

2014年 理系 第1問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ aを実数とする．このとき，座標空間内の球面$S: x^2+y^2+z^2=1$と直線$\ell: (x,\ y,\ z)=(2,\ -1,\ 0)+t(-1,\ a,\ a)$について，次の問いに答えよ．

(1) Sとℓが異なる2点で交わるようなaの値の範囲を求めよ．

(2) aの値が(1)で求めた範囲にあるとき，Sとℓの2つの交点の間の距離dをaを用いて表せ．

(3) (2)のdが最大となるような実数aの値とそのときのdを求めよ．

(1) $x=-t+2,\ y=at-1,\ z=at$ をSの式に代入して

$$(-t+2)^2+(at-1)^2+(at)^2=1$$

$\therefore\ (2a^2+1)t^2-(4+2a)t+4=0$ の判別式をDとおくと

$$D/4=(2+a)^2-(2a^2+1)\cdot 4>0$$

$\therefore\ -7a^2+4a>0$　$\therefore\ a(7a-4)<0$　$\therefore\ \underline{0<a<\frac{4}{7}}$ //

(2) $(2a^2+1)t^2-(4+2a)t+4=0$ の解を $t=\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$とおくと

交点は $(-\alpha+2,\ a\alpha-1,\ a\alpha),\ (-\beta+2,\ a\beta-1,\ a\beta)$ より

$$d^2=(-\alpha+2+\beta-2)^2+(a\alpha-1-a\beta+1)^2+(a\alpha-a\beta)^2$$

$$=(\alpha-\beta)^2+a^2(\alpha-\beta)^2+a^2(\alpha-\beta)^2$$

$$=(2a^2+1)(\alpha-\beta)^2$$

ここで，解と係数の関係より，$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$$=\left(\frac{4+2a}{2a^2+1}\right)^2-4\cdot\frac{4}{2a^2+1}$$

$$\therefore\ d^2=\frac{4(a+2)^2}{2a^2+1}-16$$

$$=\frac{-4a(7a-4)}{2a^2+1}$$

$\therefore\ \underline{d=2\sqrt{\frac{-a(7a-4)}{2a^2+1}}}$ //

2枚目につづく．

0001691098038999

金沢大学

2014年 理系 第1問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ aを実数とする．このとき，座標空間内の球面$S : x^2+y^2+z^2=1$と直線$\ell : (x,\ y,\ z)=(2,\ -1,\ 0)+t(-1,\ a,\ a)$について，次の問いに答えよ．

(1) Sとℓが異なる2点で交わるようなaの値の範囲を求めよ．

(2) aの値が(1)で求めた範囲にあるとき，Sとℓの2つの交点の間の距離dをaを用いて表せ．

(3) (2)のdが最大となるような実数aの値とそのときのdを求めよ．

(3) $f(a)=d^2=\dfrac{-28a^2+16a}{2a^2+1}$ とおくと

$$f'(a)=\frac{(-56a+16)(2a^2+1)-(-28a^2+16a)\cdot 4a}{(2a^2+1)^2}$$

$$=\frac{-8(4a-1)(a+2)}{(2a^2+1)^2}$$

∴ $0<a<\frac{4}{7}$ で $f'(a)=0$ となるのは $a=\frac{1}{4}$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$(\frac{4}{7})$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗		↘	

∴ $f(a)$は $a=\frac{1}{4}$ のとき

最大値 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\dfrac{-\frac{7}{4}+4}{\frac{1}{8}+1}=2$ をとる

∴ d^2の最大値が2より．dの最大値は$\sqrt{2}$ $(a=\frac{1}{4}$のとき$)$ //