金沢大学

2015年 理系 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $a>1$ とする．無限等比級数

$$a+ax(1-ax)+ax^2(1-ax)^2+ax^3(1-ax)^3+\cdots$$

が収束するとき，その和を $S(x)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) この無限等比級数が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ．また，そのときの $S(x)$ を求めよ．

(2) x が (1) で求めた範囲を動くとき，$S(x)$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(3) $I(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}} S(x)\,dx$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ．

(1) 公比は $x(1-ax)$ であるから，収束する条件は，$|x(1-ax)|<1$

よって，$-1<-ax^2+x<1$

$\therefore$ $ax^2-x-1<0$ かつ $ax^2-x+1>0$

$a>1$ より，$\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}<x<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$ かつ $a\left(x-\dfrac{1}{2a}\right)^2+\dfrac{4a-1}{4a}>0$

$a>1$ よりすべての実数 x で成り立つ

よって，$\underline{\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}<x<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}}$ //

$$S(x)=\frac{a}{1-x(1-ax)}=\underline{\frac{a}{ax^2-x+1}} \text{ //}$$

(2) $S(x)=\dfrac{a}{a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2-\frac{1}{4a}+1}$ で，$\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}<\dfrac{1}{2a}<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$ より，$S(x)\leqq\dfrac{a}{-\frac{1}{4a}+1}=\dfrac{4a^2}{4a-1}$

また，範囲の端を考えることで，$S(x)>\dfrac{a}{2}$　以上より，$\underline{\dfrac{a}{2}<S(x)\leqq\dfrac{4a^2}{4a-1}}$ //

(3) $0\leqq x\leqq\dfrac{1}{a}$ のとき，$a\leqq S(x)\leqq\dfrac{4a^2}{4a-1}$ であるから，

$$\int_0^{\frac{1}{a}} a\,dx \leqq \int_0^{\frac{1}{a}} S(x)\,dx \leqq \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{4a^2}{4a-1}\,dx$$

よって，$\Big[ax\Big]_0^{\frac{1}{a}} \leqq \displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}} S(x)\,dx \leqq \left[\frac{4a^2}{4a-1}x\right]_0^{\frac{1}{a}}$

$$1\leqq\int_0^{\frac{1}{a}} S(x)\,dx\leqq\frac{4a}{4a-1}$$

$=\dfrac{1}{1-\frac{1}{4a}}$ $\therefore$ $a\to\infty$ のとき，1に収束

$\therefore$ はさみうちの原理より，$\underline{\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)=1}$ //