



2010年工学部第5問

5 定積分

$$I_n = \int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^n dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

について、次の各問に答えよ。

(1)  $I_1$  の値を求めよ。

(2) 等式

$$I_{n+1} = \sqrt{e} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (n+1)I_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ。

(3) すべての自然数  $n$  について、等式

$$I_n = (-1)^{n-1} n! + \sqrt{e} \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \frac{n!}{m!} \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

が成り立つことを、数学的帰納法を用いて証明せよ。ただし、 $0! = 1$  とする。