0002202817977999

室蘭工業大学

2016年 工学部 第2問

1枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 関数 $y=f(x)$ のグラフが媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x=\sin\theta-\theta\cos\theta \\ y=\cos\theta+\theta\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

と表されている.

(1) 関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ.

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin 2\theta\, d\theta$ および $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\cos 2\theta\, d\theta$ を計算せよ.

(3) 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸, および2直線 $x=0$ と $x=1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

(1) $\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta - (\cos\theta + \theta(-\sin\theta)) = \theta\sin\theta$ $\quad\therefore$ $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき $\frac{dx}{d\theta} \geqq 0$ より x は単調増加

$\frac{dy}{d\theta} = -\sin\theta + \sin\theta + \theta\cos\theta = \theta\cos\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ $\quad\therefore \frac{dy}{dx}=0$ となるのは $\theta=\frac{\pi}{2}$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	π
$\frac{dy}{dx}$		$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	-1

$\therefore$ 極大値 $\frac{\pi}{2}$ ($\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき) //

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin 2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)' d\theta$

$= \left[-\frac{\theta}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\cos 2\theta\, d\theta$

$= \frac{\pi}{4} - \left[-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{4}$ //

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\cos 2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)' d\theta$

$= \left[\frac{\theta^2}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin 2\theta\, d\theta$

$= -\frac{\pi}{4}$ //

2枚目へつづく

0002202817977999

室蘭工業大学

2016年 工学部 第2問

2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 関数 $y = f(x)$ のグラフが媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x = \sin\theta - \theta\cos\theta \\ y = \cos\theta + \theta\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

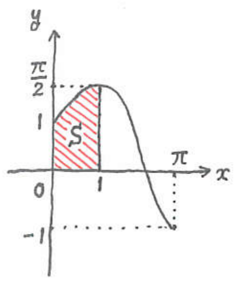
と表されている．

(1) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin 2\theta\, d\theta$ および $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\cos 2\theta\, d\theta$ を計算せよ．

(3) 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸，および2直線 $x = 0$ と $x = 1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(3) (1)の増減表より $y = f(x)$ のグラフは右のようになる



$$S = \int_0^1 y\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\cdot d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \theta\sin\theta)\cdot\theta\sin\theta\cdot d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin\theta\cos\theta + \theta^2\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta}{2}\sin 2\theta + \theta^2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin 2\theta\, d\theta + \left[\frac{1}{6}\theta^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\cos 2\theta\, d\theta$$

よって (2) より

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^3}{8} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \underline{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi^3}{48}}$$ //