

2012年工学部第2問


 数理  
石井K

2 関数  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  について、以下の問いに答えなさい。

- (1)  $x > 0$  における曲線  $y = f(x)$  の概形を書きなさい。  
 (2)  $t > 0$  のとき、3直線  $y = 0$ ,  $x = t$ ,  $x = t + 2$  と曲線  $y = f(x)$  で囲まれる部分の面積  $S(t)$  を求めなさい。  
 (3)  $t > 0$  における  $S(t)$  の最小値を求めなさい。

$$(1) f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$\therefore$  右のグラフになる。漸近線は  $y = x$

$$(2) S(t) = \int_t^{t+2} \left( x + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \left[ \frac{x^2}{2} + \log|x| \right]_t^{t+2}$$

$$= \frac{1}{2}(t+2)^2 + \log(t+2) - \frac{t^2}{2} - \log t$$

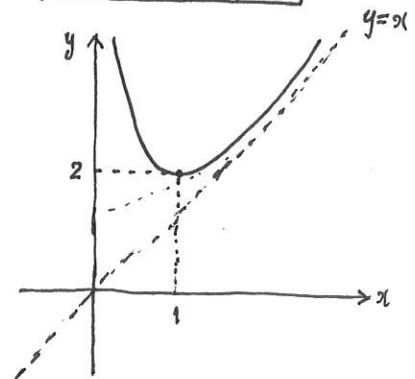
$$= \underline{2t + 2 + \log \frac{t+2}{t}} \quad "$$

$$(3) S'(t) = 2 + \frac{-2 \cdot \frac{1}{t^2}}{1 + \frac{2}{t}} = 2 - \frac{2}{t^2 + 2t} = \frac{2(t^2 + 2t - 1)}{t^2 + 2t}$$

$\therefore t > 0$  において  $S'(t) = 0$  となるのは、 $t = \sqrt{2} - 1$

$\therefore$  最小値は、 $S(\sqrt{2} - 1) = \underline{2\sqrt{2} + 2\log(\sqrt{2} + 1)}$  "

|          |     |     |   |     |
|----------|-----|-----|---|-----|
| $x$      | (0) | ... | 1 | ... |
| $f'(x)$  |     | -   | 0 | +   |
| $f''(x)$ |     | +   | + | +   |
| $f(x)$   |     | ↘   | 2 | ↗   |



|         |     |     |              |     |
|---------|-----|-----|--------------|-----|
| $t$     | (0) | ... | $\sqrt{2}-1$ | ... |
| $S'(t)$ |     | -   | 0            | +   |
| $S(t)$  |     | ↘   |              | ↗   |