0001690369038999

新潟大学

2014年第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $a,\ b,\ c$ を実数とする．行列 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ a & -3\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -6\end{pmatrix}$ は $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$ を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a,\ b,\ c$ の値を求めよ．

(2) A は逆行列をもつことを示し，A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，A^n を求めよ．

(4) 自然数 n に対して，$(A+6A^{-1})^n$ を求めよ．

(1) $\det(P)=2\cdot(-6)-2\cdot1=-14$ より．$P^{-1}=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-6 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}6 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

$\therefore P^{-1}AP=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}6 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ a & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -6\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}2a+30 & a-6\\ 24-4a & -2a-44\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases}2a+30=42\\ a-6=14b\\ 24-4a=0\\ -2a-44=14c\end{cases} \Leftrightarrow \underline{a=6,\ b=0,\ c=-4}$ //

(2) $\det(A)=2\cdot(-3)-1\cdot a=-12$ $\therefore \det(A)\neq 0$ より．A は逆行列をもつ ■

$A^{-1}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{12}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}}$ //

(3) $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$ より．$\underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{n\text{コ}}=\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & (-4)^n\end{pmatrix}$

$\therefore P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & (-4)^n\end{pmatrix}$ $\therefore A^n=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & (-4)^n\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{14}\right)\begin{pmatrix}-6 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$

$=\underline{\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\cdot3^n+(-4)^n & 3^n-(-4)^n\\ 6\cdot3^n-6(-4)^n & 3^n+6(-4)^n\end{pmatrix}}$ //

(4) $B=A+6A^{-1}$ とおくと．$B=\begin{pmatrix}\frac{7}{2} & \frac{3}{2}\\ 9 & -4\end{pmatrix}$ ← A のときと同じ P を使って同じようにできないか試してみると…実はできる．

このとき．$P^{-1}BP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & -11\end{pmatrix}$ より．

(3) と同様にして．$P^{-1}B^nP=\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}10^n & 0\\ 0 & (-11)^n\end{pmatrix}$ $\therefore B^n=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -6\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}10^n & 0\\ 0 & (-11)^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{14}\begin{pmatrix}6 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

$\therefore (A+6A^{-1})^n=B^n=\underline{\frac{1}{7\cdot2^n}\begin{pmatrix}6\cdot10^n+(-11)^n & 10^n-(-11)^n\\ 6\cdot10^n-6\cdot(-11)^n & 10^n+6(-11)^n\end{pmatrix}}$ //