00009427275099999

大阪教育大学

2012年第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ nは自然数とする．次の問に答えよ．

(1) 次の不等式を示せ．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$$

(2) $x > 0$のとき，次の不等式を示せ．

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

(3) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k \sin \frac{1}{k}\right)$$

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

$\displaystyle < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}$

$\displaystyle = 1 + \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cancel{\cdot}\cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}\right)$

$\displaystyle = 2 - \frac{1}{n}$

< 2 ■

この不等式の証明はときどき出題される．

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ ← ゼータ関数と呼ばれる

(2) $f(x) = x - \sin x$ とおくと．$f'(x) = 1 - \cos x \geqq 0$

$\therefore$ $f(x)$：単調増加　$\therefore$ $f(x) > f(0) = 0$　　$\therefore$ $\sin x < x$

$g(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$ とおくと．$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$

$g''(x) = x - \sin x = f(x) > 0$　　$\therefore$ $g'(x)$：単調増加　$\therefore$ $g'(x) > g'(0) = 0$

$\therefore$ $g(x)$：単調増加　$\therefore$ $g(x) > g(0) = 0$　　　$\therefore$ $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$

以上より．$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ ■

(3) (2)より．

$\frac{1}{k} - \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^3 < \sin\frac{1}{k} < \frac{1}{k}$　　両辺kをかけて．$1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{k^2} < k\sin\frac{1}{k} < 1$

$k=1$から$k=n$までの和を考えると．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{n} k\sin\frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{n} 1 = n$

(1)を用いると．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{k^2} > n - \frac{1}{6}\cdot 2 = n - \frac{1}{3}$

$\displaystyle\therefore\ 1 - \frac{1}{3n} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sin\frac{1}{k} < 1$

$n\to\infty$のとき．はさみうちの原理より．$1 - \frac{1}{3n} \to 1$ なので

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k\sin\frac{1}{k}\right) = \underline{1}$$