新潟大学

2013 年 理系 第 5 問

$\boxed{5}$ 微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての実数 x，y に対して

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y \quad \cdots (*)$$

を満たし，さらに $f'(0) = 0$ を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $f(0)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f(x)}$ を求めよ．

(1) (*) に $y=0$ を代入して,

$f(x)f(0) - f(x) = 0$

$\therefore f(x)\{f(0)-1\} = 0 \quad \cdots ①$

(*) に $x = y = \frac{\pi}{2}$ を代入して,

$\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 - f(\pi) = 1 \quad \cdots ②$

① より, $f(x) = 0$ と仮定すると

② の左辺は 0, 右辺は 1 となり矛盾する.

$\therefore \underline{f(0) = 1}$ //

(2) (*) を両辺 y で微分して,

$f(x)f'(y) - f'(x+y) = \sin x \cos y$

$y=0$ を代入して,

$f(x)f'(0) - f'(x) = \sin x$

$\therefore f'(0) = 0$ より, $\underline{f'(x) = -\sin x}$ //

(3) (2) より, $f(x) = \cos x + C$ （C は定数）と表せるが

$f(0) = 1$ より, $C = 0$ $\quad \therefore f(x) = \cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x}\right) dx$$

$\dfrac{\cos x}{1+\sin x} + \dfrac{\cos x}{1-\sin x} = \dfrac{(1+\sin x)'}{1+\sin x} - \dfrac{(1-\sin x)'}{1-\sin x}$ より

$$= \frac{1}{2}\Big[\log|1+\sin x| - \log|1-\sin x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\log\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \log\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

$= \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \dfrac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})^2$

$$= \underline{\log(2+\sqrt{3})} \text{ //}$$