

2013年 医学部 第1問

1枚目 / 3

増田

1 次の各問に答えよ.

- (1) 空間に点 $P(-4, -6, 3)$ がある. いま, 2点 $A(2, -3, 0)$, $B(-4, 0, 12)$ を結ぶ直線上に点 H をとり, 直線 PH が直線 AB と垂直になるようにする. 点 H の座標を求めよ.
- (2) 次の (i), (ii) に答えよ.
- (i) $\tan \frac{\theta}{2} = t$ とおく. $\sin \theta$ を t を用いて表せ.
- (ii) $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{5}$ ($-\pi < \theta < \pi$) とする. $\tan \frac{\theta}{2}$ の値を求めよ.
- (3) 1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚の同じ形のカードがある. ただし, n は 2 以上の整数である. この n 枚のカードから, 元に戻さずに 1 枚ずつ 2 回無作為に抜き出すとする. 2 回目に抜き出したカードの番号が 1 回目の番号より大きければ, 2 回目のカードの番号を得点とする. そうでなければ得点は 0 とする. 次の問に答えよ.
- (i) m は $1 \leq m \leq n$ を満たす整数とする. 2 回目のカードの番号が m となる確率を求めよ.
- (ii) m は (i) と同じとする. 得点が m となる確率を求めよ.
- (iii) 得点が 0 となる確率を求めよ.
- (iv) 得点の期待値を求めよ.

(1) 点 H は直線 AB 上にあるので, 実数 t を用いて次のように表せる.

$$\begin{aligned}\vec{OH} &= t\vec{OA} + (1-t)\vec{OB} \\ &= (2t, -3t, 0) + (-4+4t, 0, 12-12t) \\ &= (6t-4, -3t, 12-12t) \quad \dots (*)\end{aligned}$$

$$\vec{PH} = \vec{OH} - \vec{OP} = (6t, -3t+6, 9-12t), \quad \vec{AB} = (-6, 3, 12)$$

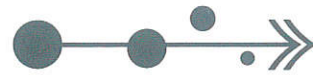
$PH \perp AB$ となるには, $\vec{PH} \cdot \vec{AB} = 0$ となればよいので.

$$-36t - 9t + 18 + 108 - 144t = 0$$

$$189t = 126$$

$$3t = 2 \quad \therefore t = \frac{2}{3}$$

$t = \frac{2}{3}$ を (*) に代入して, H の座標 $(0, -2, 4)$



2013年 医学部 第1問

2枚目 / 3

増田

1 次の各問に答えよ。

- (1) 空間に点 $P(-4, -6, 3)$ がある。いま、2点 $A(2, -3, 0)$, $B(-4, 0, 12)$ を結ぶ直線上に点 H をとり、直線 PH が直線 AB と垂直になるようにする。点 H の座標を求めよ。
- (2) 次の (i), (ii) に答えよ。
- (i) $\tan \frac{\theta}{2} = t$ とおく。 $\sin \theta$ を t を用いて表せ。
- (ii) $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{5}$ ($-\pi < \theta < \pi$) とする。 $\tan \frac{\theta}{2}$ の値を求めよ。
- (3) 1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚の同じ形のカードがある。ただし、 n は 2 以上の整数である。この n 枚のカードから、元に戻さずに 1 枚ずつ 2 回無作為に抜き出すとする。2 回目に抜き出したカードの番号が 1 回目の番号より大きければ、2 回目のカードの番号を得点とする。そうでなければ得点は 0 とする。次の問に答えよ。
- (i) m は $1 \leq m \leq n$ を満たす整数とする。2 回目のカードの番号が m となる確率を求めよ。
- (ii) m は (i) と同じとする。得点が m となる確率を求めよ。
- (iii) 得点が 0 となる確率を求めよ。
- (iv) 得点の期待値を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (2) (i) \quad \sin \theta &= \sin \left(2 \cdot \frac{\theta}{2} \right) = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\
 &= 2 \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \\
 &= 2 \tan \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{2t}{1+t^2}
 \end{aligned}$$

$$\leftarrow \cos^2 A = \frac{1}{1 + \tan^2 A} \text{ を用いた}$$

$$(ii) (i) \text{ と同様に } \cos \theta = \cos \left(2 \cdot \frac{\theta}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = -\frac{1}{5}$$

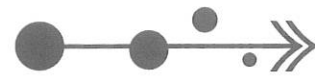
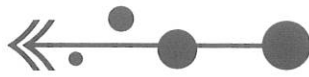
$$5(2t + 1 - t^2) = -(1 + t^2)$$

$$4t^2 - 10t + 6 = 0$$

$$2(t-3)(2t+1) = 0$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2}, 3 \quad (\text{両方とも適})$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}, 3$$



2013年 医学部 第1問

3枚目 / 3

増田

1 次の各問に答えよ。

(1) 空間に点 $P(-4, -6, 3)$ がある。いま、2点 $A(2, -3, 0)$, $B(-4, 0, 12)$ を結ぶ直線上に点 H をとり、直線 PH が直線 AB と垂直になるようにする。点 H の座標を求めよ。

(2) 次の (i), (ii) に答えよ。

(i) $\tan \frac{\theta}{2} = t$ とおく。 $\sin \theta$ を t を用いて表せ。

(ii) $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{5}$ ($-\pi < \theta < \pi$) とする。 $\tan \frac{\theta}{2}$ の値を求めよ。

(3) 1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚の同じ形のカードがある。ただし、 n は 2 以上の整数である。この n 枚のカードから、元に戻さずに 1 枚ずつ 2 回無作為に抜き出すとする。2 回目に抜き出したカードの番号が 1 回目の番号より大きければ、2 回目のカードの番号を得点とする。そうでなければ得点は 0 とする。次の問に答えよ。

(i) m は $1 \leq m \leq n$ を満たす整数とする。2 回目のカードの番号が m となる確率を求めよ。

(ii) m は (i) と同じとする。得点が m となる確率を求めよ。

(iii) 得点が 0 となる確率を求めよ。

(iv) 得点の期待値を求めよ。

(3) (i) 1 回目が m 以外 2 回目に m

$$\frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

(ii) 1 回目が m より小さい 2 回目に m

$$\frac{m-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{m-1}{n(n-1)}$$

(iii) 得点が 0 となるのは、得点が m となる時以外 (余事象)

得点が m となる確率は $\sum_{m=1}^n \frac{m-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) - n \right\}$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

求める確率は $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(iv) 得点の期待値は、確率に得点 m を掛けて

$$\sum_{m=1}^n m \times \frac{m-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{m=1}^n (m^2 - m)$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2} n(n+1) \right\} = \frac{n+1}{3}$$