0001647812538999

東北大学

2014年 第5問

$\boxed{5}$ 整数 n に対して,

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x}\,dx$$

とする.

(1) I_0 を求めよ.

(2) n を正の整数とするとき, $I_n - I_{n-1}$ を求めよ.

(3) I_5 を求めよ.

和・積

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$ より.

$\begin{cases} \alpha+\beta = (2n+1)x \\ \alpha-\beta = (2n-1)x \end{cases}$ となるものを探すと.

$\alpha = 2nx,\ \beta = x$ ← こうおけばよい

(1) $I_0 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

$= \left[\log|\sin x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\log\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \underline{\frac{1}{2}\log 2}$ //

(2) $I_n - I_{n-1} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n+1)x) - \cos((2n-1)x)}{\sin x}\,dx$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2\sin 2nx \cdot \sin x}{\sin x}\,dx$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -2\sin 2nx\,dx$

$= \left[\frac{1}{n}\cos 2nx\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{n}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right)$

$\therefore I_n - I_{n-1} = \begin{cases} 0 & (n=4k \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{n} & (n=4k\pm1 \text{ のとき}) \\ \frac{2}{n} & (n=4k+2 \text{ のとき}) \end{cases}$ //

ただし, k は整数

(3) (2) を使って

$I_1 - I_0 = -1$

$I_2 - I_1 = 1$

$I_3 - I_2 = -\frac{1}{3}$

$I_4 - I_3 = 0$

$+)\ I_5 - I_4 = -\frac{1}{5}$

すべてたした

$\therefore I_5 - I_0 = -\frac{8}{15}$

$\therefore \underline{I_5 = -\frac{8}{15} + \frac{1}{2}\log 2}$ //