



2015年工学部第4問

4 xy 平面上に曲線 $C: y = \log x$ がある。曲線 C 上の異なる 2 点 $A(a, \log a)$, $B(b, \log b)$ における法線をそれぞれ l , m とし, l と m の交点を P とする。線分 AP の長さを d とするとき, 次の問いに答えよ。ただし, 対数は自然対数である。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) P の座標を a, b を用いて表せ。

(3) $d = \sqrt{a^2 + 1} \left(b + \frac{\log a - \log b}{a - b} \right)$ を示せ。

(4) B が A に限りなく近づくときの d の極限値を $r = \lim_{b \rightarrow a} d$ とする。

(i) $r = \frac{(a^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{a}$ を示せ。

(ii) a が $a > 0$ の範囲を動くとき, r の最小値と, そのときの a の値を求めよ。