山形大学

2015年 農学部 第1問

数理石井K

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ．

(1) △ABCにおいて，辺BC，CA，ABの長さをそれぞれa，b，cで表し，∠Aの大きさをAで表すことにする．この三角形において

$$\frac{a+b}{6}=\frac{b+c}{5}=\frac{c+a}{7}$$

であり，面積が$3\sqrt{15}$のとき，$\cos A$とaを求めよ．

(2) 数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nが，$S_n=2a_n-2^n$で与えられるとき，次の問に答えよ．

(i) a_1を求めよ．

(ii) a_{n+1}とa_nの関係式を求めよ．

(iii) 一般項a_nを求めよ．

(1) $\frac{a+b}{6}=\frac{b+c}{5}=\frac{c+a}{7}=k$ とおくと.

$$\begin{cases} a+b=6k & \cdots ① \\ b+c=5k & \cdots ② \\ c+a=7k & \cdots ③ \end{cases}$$

①,②,③ をすべて足して. $2(a+b+c)=18k$

$\therefore a+b+c=9k \cdots ④$

①と④より. $c=3k$

②と④より, $a=4k$

③と④より, $b=2k$

$\therefore$ 余弦定理より. $\cos A=\frac{4k^2+9k^2-16k^2}{2\cdot 2k\cdot 3k}$ $\quad\therefore \cos A=-\frac{1}{4}$ //

$3\sqrt{15}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$ より. $3\sqrt{15}=\frac{1}{2}\cdot 2k\cdot 3k\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$ $\quad\therefore k>0$ より. $k=2$ $\quad\therefore a=8$ //

(2) (i) $a_1=S_1=2a_1-2$ $\quad\therefore a_1=2$ //

(ii) $S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}-2^{n+1}-2a_n+2^n$

$\therefore a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n-2^n$ $\quad\therefore a_{n+1}=2a_n+2^n$ //

(iii) (ii)でもとめた漸化式の両辺を2^{n+1}で割って, $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$

$\therefore$ 数列$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$は初項が1，公差が$\frac{1}{2}$の等差数列なので

$\frac{a_n}{2^n}=1+\frac{1}{2}(n-1)$ $\quad\therefore a_n=(n+1)\cdot 2^{n-1}$ //