# 山形大学

2014年 医学部 第3問　　1枚目.

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ を $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|x-2t|\sin t\,dt$ で定める $(0 \leqq x \leqq \pi)$．次の問に答えよ．

(1) 次の不定積分を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

$$\int t\sin at\,dt, \quad \int \sin^2\frac{t}{2}\,dt$$

(2) $f(x)$ の最小値を求め，そのときの $x$ の値を求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)-f(0)$ と $x$ 軸および直線 $x=\pi$ で囲まれた図形を $x$ 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積 $V$ を求めよ．

(1) $\int t\sin at\,dt = \int t\cdot\left(-\frac{1}{a}\cos at\right)' dt$

$= -\frac{t}{a}\cos at - \int -\frac{1}{a}\cos at\,dt$

$= \underline{\frac{1}{a^2}\sin at - \frac{t}{a}\cos at + C \ (C\text{は積分定数})}$ //

$\int \sin^2\frac{t}{2}\,dt = \int \frac{1-\cos t}{2}\,dt$

$= \underline{\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin t + C \ (C\text{は積分定数})}$ //

(2) $f(x) = \int_0^{\frac{x}{2}}(x-2t)\sin t\,dt + \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2t-x)\sin t\,dt$

$= x\int_0^{\frac{x}{2}}\sin t\,dt - 2\int_0^{\frac{x}{2}}t\sin t\,dt + 2\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt - x\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt$

$= x\left[-\cos t\right]_0^{\frac{x}{2}} - 2\left[\sin t - t\cos t\right]_0^{\frac{x}{2}} + 2\left[\sin t - t\cos t\right]_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - x\left[-\cos t\right]_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= x\left(-\cos\frac{x}{2}+1\right) - 2\left(\sin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right) + 2\left(1-\sin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right) - x\cdot\cos\frac{x}{2}$

$= -4\sin\frac{x}{2} + x + 2$

$\therefore f'(x) = -2\cos\frac{x}{2} + 1$

$\therefore f'(x)=0$ となるのは $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$ すなわち $x=\frac{2\pi}{3}$ のとき.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | |

このとき．最小値 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -4\sin\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + 2$

$= \underline{\frac{2\pi}{3} - 2\sqrt{3} + 2}$ $\left(x=\frac{2\pi}{3}\text{ のとき}\right)$ //

0001857182418999

# 山形大学

2014年 医学部 第3問　　2枚目.

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ を $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|x-2t|\sin t\,dt$ で定める $(0\leqq x\leqq\pi)$．次の問に答えよ．

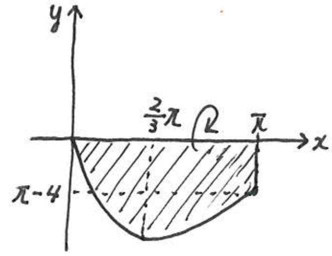
(1) 次の不定積分を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

$$\int t\sin at\,dt,\quad \int \sin^2\frac{t}{2}\,dt$$

(2) $f(x)$ の最小値を求め，そのときの $x$ の値を求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)-f(0)$ と $x$ 軸および直線 $x=\pi$ で囲まれた図形を $x$ 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積 $V$ を求めよ．

(3) (2)より $\begin{cases} f(\pi)=\pi-2 \\ f(0)=2 \end{cases}$　$\therefore f(\pi)-f(0)=\pi-4<0$
$f(0)-f(0)=0$




(2)の増減表より．$y=f(x)-f(0)$ のグラフは右のようになる．

$$\therefore V=\pi\int_0^{\pi}\{f(0)-f(x)\}^2dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\left\{4\sin\frac{x}{2}-x\right\}^2dx$$

$$=16\pi\int_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{2}dx-8\pi\int_0^{\pi}x\sin\frac{x}{2}dx+\pi\int_0^{\pi}x^2dx$$

$$=16\pi\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x\right]_0^{\pi}-8\pi\left[4\sin\frac{x}{2}-2t\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\pi}+\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$=16\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)-8\pi(4)+\pi\cdot\frac{\pi^3}{3}$$

$$=\underline{\frac{\pi^4}{3}-32\pi+8\pi^2}\ //$$