



2018年工学部第4問

4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \pi, \quad a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a_{n+1}x + \frac{\pi}{2}a_n \right) \cos x \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義するとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1$ を示せ。
- (2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} + a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示し、その一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{n+1} - \frac{\pi}{2}a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。 $\{c_n\}$ は等比数列であることを示し、その一般項を求めよ。
- (4) (2) と (3) の結果を用いて、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ の値を求めよ。