山口大学

2014年 第3問

$\boxed{3}$ a, bを実数とする．行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$について，次の問いに答えなさい．

(1) すべての自然数nに対して，

$$A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$$

となる実数a_n, b_nがあることを数学的帰納法で示し，a_n, b_nを用いてa_{n+1}, b_{n+1}を表しなさい．

(2) $c_n=a_n+b_n$, $d_n=a_n-b_n$とおく．数列$\{c_n\}$の漸化式と数列$\{d_n\}$の漸化式をそれぞれ求め，a, b, nを用いてc_n, d_nを表しなさい．

(3) a, b, nを用いてa_n, b_nを表しなさい．

(1) (i) $n=1$ のとき $A^1=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ より $a_1=a$, $b_1=b$ ととればよいので成り立つ

(ii) $n=k$のとき 成り立つと仮定すると，

$A^k=\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ となる a_k, b_kが存在する

このとき，$A^{k+1}=A\cdot A^k=\begin{pmatrix} a\cdot a_k+b\cdot b_k & a\cdot b_k+b\cdot a_k \\ a\cdot b_k+b\cdot a_k & a\cdot a_k+b\cdot b_k \end{pmatrix}$

$\therefore$ $a_{k+1}=a\cdot a_k+b\cdot b_k$, $b_{k+1}=b\cdot a_k+a\cdot b_k$ ととれば成り立つ

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ

(i), (ii) より すべての自然数 nに対して成り立つ ■

上の議論より，$\underline{a_{n+1}=a\cdot a_n+b\cdot b_n,\ b_{n+1}=b\cdot a_n+a\cdot b_n}$ //

(2) (1)より，$a_{n+1}+b_{n+1}=(a+b)a_n+(a+b)b_n$ $\therefore$ $\underline{c_{n+1}=(a+b)c_n}$ //

$\{c_n\}$は初項 $a+b$, 公比 $a+b$ の等比数列 $\therefore$ $\underline{c_n=(a+b)^n}$ //

同様に，$a_{n+1}-b_{n+1}=(a-b)a_n+(b-a)b_n$ $\therefore$ $\underline{d_{n+1}=(a-b)d_n}$ //

$\{d_n\}$は初項 $a-b$, 公比 $a-b$ の等比数列 $\therefore$ $\underline{d_n=(a-b)^n}$ //

(3) $a_n=\frac{1}{2}(c_n+d_n)$ より $\underline{a_n=\frac{1}{2}\{(a+b)^n+(a-b)^n\}}$ //

$b_n=\frac{1}{2}(c_n-d_n)$ より $\underline{b_n=\frac{1}{2}\{(a+b)^n-(a-b)^n\}}$ //