2015年第1問

数理
石井K

$\boxed{1}$ $p$, $q$, $m$ を実数とする．放物線 $y=-x^2+2px+q$ を $C$ とし，その頂点は直線 $y=mx-3$ 上にあるとする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) $q$ を $p$, $m$ を用いて表しなさい．

(2) $C$ の頂点の $x$ 座標が $-4$ のとき，$C$ が $x$ 軸と異なる2点で交わるように，$m$ の値の範囲を定めなさい．また，そのとき $C$ が $x$ 軸から切り取る線分の長さを $m$ を用いて表しなさい．

(3) $p$ の値にかかわらず，$C$ と $y$ 軸の共有点の $y$ 座標が負となるように，$m$ の値の範囲を定めなさい．

(1) $C: y=-(x-p)^2+p^2+q$ より頂点は $(p,\ p^2+q)$

これが $y=mx-3$ 上にあるので

$p^2+q=mp-3$ $\quad\therefore\ \underline{q=-p^2+mp-3}$ //

(2) $p=-4$ となり (1)より，$q=-4m-19$

$\therefore\ C: y=-x^2-8x-4m-19$

$-x^2-8x-4m-19=0$ …① の判別式を $D$ とおくと，

$\frac{D}{4}=(-4)^2-(-1)\cdot(-4m-19)$

$=-4m-3$

$\therefore\ D>0$ なので $-4m-3>0$ $\quad\therefore\ \underline{m<-\frac{3}{4}}$ //

このとき①の解は，$x=-4\pm\sqrt{-4m-3}$

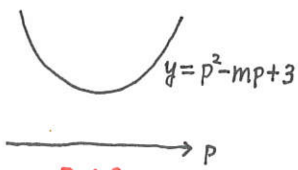
$\therefore$ 求める線分の長さは，$-4+\sqrt{-4m-3}-(-4-\sqrt{-4m-3})=\underline{2\sqrt{-4m-3}}$ //

(3) $C$ と $y$ 軸の共有点の $y$ 座標は $q$ すなわち，$-p^2+mp-3$

$p$ の値によらず $-p^2+mp-3<0$ が成り立つ $\iff$ $p$ の値によらず $p^2-mp+3>0$ が成り立つ

よって，$p$ の関数 $y=p^2-mp+3$ の判別式を $D'$ とおくと，

$D'<0$ となればよい




$D<0$

$D'=m^2-4\cdot 3<0$

$\therefore\ \underline{-2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}}$ //