



2010年理(数理科学)・医第2問

2 次の初項と漸化式で定まる数列  $\{a_n\}$  を考える.

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = e^{-a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ここで,  $e$  は自然対数の底で,  $1 < e < 3$  である. このとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) すべての自然数  $n$  について  $\frac{1}{3} < a_n < 1$  が成り立つことを示しなさい.
- (2) 方程式  $x = e^{-x}$  はただ1つの実数解をもつことと, その解は  $\frac{1}{3}$  と1の間にあることを示しなさい.
- (3) 関数  $f(x) = e^{-x}$  に平均値の定理を用いることによって, 次の不等式が成り立つことを示しなさい.

$\frac{1}{3}$  と1との間の任意の実数  $x_1, x_2$  について,

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq e^{-\frac{1}{3}} |x_2 - x_1|$$

- (4) 数列  $\{a_n\}$  は, 方程式  $x = e^{-x}$  の実数解に収束することを示しなさい.