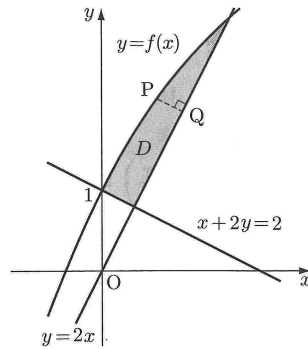


2014年医学部第5問

5 関数 $f(x) = 2x + \cos x$ がある. xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分を C とし, C と直線 $y = 2x$, および直線 $x + 2y = 2$ で囲まれた領域を D とする. 領域 D を直線 $y = 2x$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよう.



C 上の点 $P(t, f(t))$ から直線 $y = 2x$ に下ろした垂線と直線 $y = 2x$ との交点を Q とする. 線分 PQ の長さは

$$\frac{|\cos t|}{\sqrt{\text{ア}}}$$

であり, 点 Q の x 座標は

$$t + \frac{\text{イ}}{\text{ウ}} \cos t$$

である. これから, $OQ = s$ とおくと

$$s = \sqrt{\text{エ}} \left(t + \frac{\text{イ}}{\text{ウ}} \cos t \right)$$

である.

$f'(x) = 2 - \sin x > 0$ なので $f(x)$ は増加する. よって, 求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{2\sqrt{5}}{5}}^{\frac{\sqrt{5}\pi}{2}} \pi PQ^2 ds \\ &= \frac{\sqrt{\text{オ}}}{\text{カ}} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t - \frac{\text{キ}}{\text{ク}} \cos^2 t \sin t \right) dt \\ &= \frac{\sqrt{\text{ケ}}}{\text{コサ}} \pi^2 - \frac{\text{シ}}{\text{セソ}} \sqrt{\text{ス}} \pi \end{aligned}$$

である.