0001989630108999

静岡大学

2015年 教育・農・理（生物，地球） 第1問

数理 石井K

1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある．

$$a_1=\frac{1}{2},\quad 3a_{n+1}=a_n-2a_{n+1}a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$b_1=1,\quad b_{n+1}=b_n+\frac{n}{a_n} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．ただし，すべての自然数 n について $a_n>0$ である．

(1) $c_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくとき，c_{n+1} と c_n の関係式を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

これが書かれてなかったら
かっこ内の記述を自分で書くこと！
今回は必要なかった・・・

(1) ($a_{n+1}(3+2a_n)=a_n$ より．$a_n>0 \Rightarrow a_{n+1}>0$

$a_1=\frac{1}{2}$ より．帰納的に $a_n>0$ $(n=1,2,3,\cdots)$ となる．)

$a_n\neq 0$ より
$C_n=\dfrac{1}{a_n}$ としてよいことがわかる

漸化式の両辺を $a_na_{n+1}\ (\neq 0)$ で割ると，

$$\frac{3}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}}-2 \qquad \therefore\ \underline{C_{n+1}=3C_n+2}\ /\!/ \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(2) (1) より．$C_{n+1}+1=3(C_n+1)=3^2(C_{n-1}+1)=\cdots=3^n(C_1+1)$

よって．$C_n+1=3^{n-1}\cdot 3 \qquad \therefore\ C_n=3^n-1 \qquad \therefore\ \underline{a_n=\dfrac{1}{3^n-1}}\ /\!/$

(3) $b_{n+1}=b_n+n(3^n-1)$

∴ 階差数列を考えると．$n\geqq 2$ のとき．

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}k(3^k-1)$$
$$=1+\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot 3^k\right)}_{S\text{とおく}}-\frac{1}{2}n(n-1)$$
$$=\underline{\left(\frac{n}{2}-\frac{3}{4}\right)\cdot 3^n+\frac{7}{4}-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n}\ /\!/$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$$S=1\cdot 3^1+2\cdot 3^2+\cdots+(n-1)\cdot 3^{n-1}$$
$$-)\ 3S=\qquad 1\cdot 3^2+\cdots+(n-2)\cdot 3^{n-1}+(n-1)\cdot 3^n$$
$$-2S=3+3^2+\cdots+3^{n-1}-(n-1)\cdot 3^n$$
$$\therefore\ 2S=(n-1)\cdot 3^n-\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$$
$$\therefore\ S=\frac{n-1}{2}\cdot 3^n-\frac{3}{4}(3^{n-1}-1)$$
$$=\left(\frac{n}{2}-\frac{3}{4}\right)\cdot 3^n+\frac{3}{4}$$