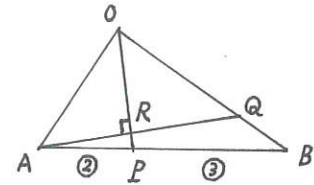


2016年理工学部第5問

5  $\triangle OAB$ において、3辺の長さを  $OA = 2$ ,  $OB = 3$ ,  $AB = 4$  とする。Pは辺  $AB$  を  $2:3$  に内分する点とし、Qは辺  $OB$  上の点で線分  $OP$  と線分  $AQ$  が垂直になるものとする。また、線分  $OP$  と線分  $AQ$  の交点を  $R$  とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$  とするとき、次の問いに答えよ。



- (1) ベクトル  $\vec{OP}$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  を用いて表せ。
- (2) 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を求めよ。
- (3)  $OQ:QB$  を求めよ。
- (4)  $OR:RP$  を求めよ。

$$(1) \vec{OP} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} //$$

(2) 余弦定理より

$$4^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \angle AOB$$

$$\therefore \cos \angle AOB = -\frac{1}{4}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{3}{2} //$$

(3)  $\vec{OQ} = s\vec{b}$  ( $0 \leq s \leq 1$ ) とおくと,  $\vec{AQ} = \vec{OQ} - \vec{OA} = -\vec{a} + s\vec{b}$

$$AQ \perp OP \text{ より } \vec{AQ} \cdot \vec{OP} = 0$$

$$\therefore \vec{AQ} \cdot \vec{OP} = (-\vec{a} + s\vec{b}) \cdot \frac{1}{5}(3\vec{a} + 2\vec{b})$$

$$= \frac{1}{5} \{ -3|\vec{a}|^2 + (3s-2)\vec{a} \cdot \vec{b} + 2s|\vec{b}|^2 \}$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ -12 - \frac{3}{2}(3s-2) + 18s \right\}$$

$$= \frac{9}{10}(3s-2)$$

$$\therefore s = \frac{2}{3} \quad \therefore \vec{OQ} = \frac{2}{3}\vec{b} \text{ より, } \underline{OQ:QB = 2:1} //$$

(4) メネラウスの定理より

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{PR}{RO} = 1 \quad \therefore \underline{OR:RP = 5:1} //$$