2012 年 第 2 問

$\boxed{2}$ 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，定積分

$$I = \int_0^{\pi} \{t\sin x - f(x)\}^2\,dx \quad (t\text{ は実数})$$

を考える．定数 c_1，c_2，c_3 を

$$c_1 = \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx, \quad c_2 = \int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx, \quad c_3 = \int_0^{\pi} \{f(x)\}^2\,dx$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) I を，t および c_1，c_2，c_3 を用いて表せ．

(2) c_1 の値を求めよ．

以下では，I を最小にする t の値を t_0 とし，その最小値を I_0 とする．

(3) t_0 を c_2 を用いて表せ．また，I_0 を c_2，c_3 を用いて表せ．

(4) 次の定積分 A，B の値を求めよ．

$$A = \int_0^{\pi} x\sin x\,dx, \quad B = \int_0^{\pi} x\cos x\,dx$$

(5) $f(x) = x(\pi - x)$ のとき，c_2，c_3 および I_0 の値をそれぞれ求めよ．