0001633096638999

# 京都大学

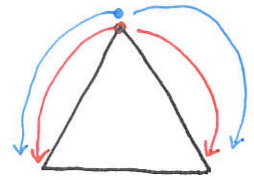
2014年 理系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 2つの粒子が時刻0において△ABCの頂点Aに位置している．これらの粒子は独立に運動し，それぞれ1秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする．たとえば，ある時刻で点Cにいる粒子は，その1秒後には点Aまたは点Bにそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する．この2つの粒子が，時刻0の $n$ 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ．

(i) $n$ 秒後に同じ点にいる場合

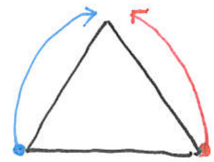
$\frac{1}{2}$ の確率で $n+1$ 秒後に同じ点にいる



(i) $n$ 秒後に同じ点にいる場合

(ii) $n$ 秒後に異なる点にいる場合

$\frac{1}{4}$ の確率で $n+1$ 秒後に同じ点にいる



(ii) $n$ 秒後に異なる点にいる場合

(i), (ii) より．$p(n+1) = \frac{1}{2}p(n) + \frac{1}{4}\{1 - p(n)\}$

$\therefore p(n+1) = \frac{1}{4}p(n) + \frac{1}{4}$

$\therefore p(n+1) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\left\{p(n) - \frac{1}{3}\right\}$

$\therefore$ 数列 $\left\{p(n) - \frac{1}{3}\right\}$ は初項 $p(1) - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$，公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列

$\therefore p(n) - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore p(n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$ //　　これは $n=0$ のときも成り立つ