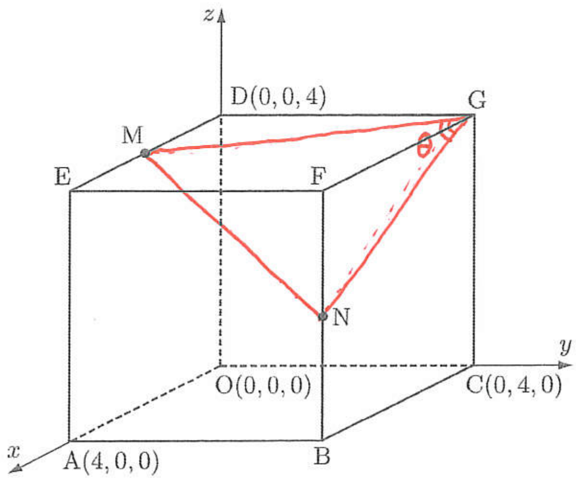
長崎大学

2015年 経済・水産・環境科学部 第2問

$\boxed{2}$ 4点O(0, 0, 0)，A(4, 0, 0)，C(0, 4, 0)，D(0, 0, 4)をとり，下図のように線分OA，OC，ODを3辺とする立方体OABC-DEFGを考える．辺DE，BFの中点を，それぞれM，Nとする．以下の問いに答えよ．



(1) ベクトル $\overrightarrow{GM}$ および $\overrightarrow{GN}$ を成分で表せ．

(2) $\angle MGN = \theta$ とする．$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) 3点G，M，Nを頂点とする三角形GMNの面積を求めよ．

(4) 三角錐FGMNにおいて，三角形GMNを底面としたときの高さを求めよ．

(5) 三角形GMNを含む平面と線分OFとの交点をPとする．このとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OF}$ を用いて表せ．

(1) G(0,4,4)，M(2,0,4)，N(4,4,2) なので

$$\overrightarrow{GM} = (2, -4, 0),\quad \overrightarrow{GN} = (4, 0, -2)$$

(2) (1)より，$|\overrightarrow{GM}| = \sqrt{2^2+(-4)^2} = 2\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{GN}| = \sqrt{4^2+(-2)^2} = 2\sqrt{5}$，$\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{GN} = 8$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{GN}}{|\overrightarrow{GM}||\overrightarrow{GN}|} = \frac{8}{2\cdot\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{2}{5}$$

(3) $$\triangle GMN = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{GM}|^2|\overrightarrow{GN}|^2 - (\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{GN})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{20\cdot 20 - 8^2} = 2\sqrt{21}$$

(4) 三角錐FGMNは底面が△FGN，高さが4なので体積Vは，$V = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$

一方，$V = \triangle GMN\cdot h\cdot\frac{1}{3}$　$\therefore V = \frac{2\sqrt{21}}{3}h$　$\therefore h = \frac{8\sqrt{21}}{21}$

(5) 点Pは線分OF上にあるので $\overrightarrow{OP} = (t, t, t)$ $(0<t<4)$ とおける．

点Pは平面GMN上にあるので，$\overrightarrow{GP} = x\overrightarrow{GM} + y\overrightarrow{GN}$ (x, y は実数) と表せるので，$\overrightarrow{OP} = (2x+4y, 4-4x, 4-2y)$

$(t, t, t) = (2x+4y, 4-4x, 4-2y)$　これを解いて，$t = \frac{20}{7}$　$\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{\frac{20}{7}}{4}\overrightarrow{OF}$　$\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{5}{7}\overrightarrow{OF}$