

2016年理工学部第2問

2 関数  $f(x) = xe^x$  と曲線  $C: y = f(x)$  を考える.

- (1) 導関数  $f'(x)$  を求めよ.  
 (2)  $C$  上の点  $(t, te^t)$  における  $C$  の接線の方程式を求めよ.  
 (3)  $C$  の接線で点  $(\frac{1}{2}, 0)$  を通るものを求めよ.  
 (4) 不定積分  $\int f(x) dx$  を求めよ.  
 (5) (3) で求めた接線のうち、接点の  $x$  座標が  $\frac{1}{2}$  より大きいものを  $l$  とするとき、 $C$  と  $l$  と直線  $x = \frac{1}{2}$  とで囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ.

$$(1) f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x \\ = \underline{(x+1)e^x} //$$

$$(2) (1)より, f'(t) = (t+1)e^t \\ \therefore \text{接線は } y = (t+1)e^t \cdot (x-t) + te^t \\ \therefore \underline{y = (t+1)e^t x - t^2 e^t} //$$

(3) (2) で求めた式に  $(\frac{1}{2}, 0)$  を代入して.

$$0 = \frac{1}{2}(t+1)e^t - t^2 e^t \\ \therefore \frac{1}{2}e^t(t+1-2t^2) = 0 \\ \therefore 2t^2 - t - 1 = 0 \\ (2t+1)(t-1) = 0 \\ \therefore t = -\frac{1}{2}, 1$$

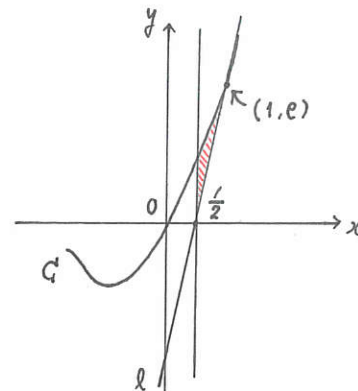
これを再び(2)の式に代入して.

$$\underline{y = \frac{1}{2\sqrt{e}}x - \frac{1}{4\sqrt{e}}, y = 2ex - e} //$$

$$(4) \int f(x) dx = \int x(e^x)' dx \\ = xe^x - \int e^x dx \\ = \underline{(x-1)e^x + C} \quad (C \text{ は積分定数}) //$$

(5)  $l: y = 2ex - e$

$x$	...	-1	...	
$f(x)$	-	0	+	
$f'(x)$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	



$$\therefore S = \int_{\frac{1}{2}}^1 xe^x - (2ex - e) dx \quad \text{ (4) を使った } \\ = [(x-1)e^x - ex^2 + ex]_{\frac{1}{2}}^1 \\ = -e + e - (-\frac{1}{2}\sqrt{e} - \frac{1}{4}e + \frac{1}{2}e) \\ = \underline{\frac{\sqrt{e}}{2} - \frac{e}{4}} //$$