大阪大学

2015年 文系 第1問

数理石井K

$\boxed{1}$ 実数 x, y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ.

$f(x,y) = x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2}\right)^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4 \\ &= \left(x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2}\right)^2 + (x^2-y^2)^2 \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - f(x,y) &= 1 - x^2 - y^2 + 2x^2y^2 - 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\ &= (1-x^2)(1-y^2) + x^2y^2 - 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\ &= \left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)^2 \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

簡潔だけど思いつくかな…？

$\therefore\ 0 \leqq f(x,y) \leqq 1$ ■

（別解）　本番で解くときは（現実的には）こっちになると思う

$|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$ より　$x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$　$(0 \leqq \alpha, \beta \leqq \pi)$ とおける

$$\begin{aligned} \therefore\ f(x,y) &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta \\ &= \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 2\beta}{2} - 2\cdot\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\cdot\frac{1+\cos 2\beta}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\alpha\sin 2\beta) \\ &= \frac{1-\cos 2(\alpha+\beta)}{2} \\ &= \sin^2(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

$0 \leqq \alpha+\beta \leqq 2\pi$ より　$0 \leqq \sin^2(\alpha+\beta) \leqq 1$

$\therefore\ 0 \leqq f(x,y) \leqq 1$ ■