広島大学

2012 年 理系 第 1 問

$\boxed{1}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換によって，2 点 P(1，1)，Q(2，2) は連立不等式 $1 \leqq x \leqq 2$，$1 \leqq y \leqq 2$ の表す領域内の点 P′，Q′ にそれぞれ移されるものとする．ただし，a，b，c，d は正の実数で $a>c$ を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $a+b=1$ および $c+d=1$ が成り立つことを証明せよ．

(2) 4 点 O(0，0)，R(a，c)，S($a+b$，$c+d$)，T(b，d) を頂点とする平行四辺形 ORST の面積を p とするとき，次の式が成り立つことを証明せよ．

$$A\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}$$

(3) 自然数 n に対して，a_n，b_n，c_n，d_n を

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

で定める．このとき a_n，b_n，c_n，d_n を b，c，n および (2) の p を用いて表せ．

(4) $A^3=\dfrac{1}{27}\begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$ となるように A を定めよ．