2016年 理系 第4問

$\boxed{4}$ t を実数とし，xy 平面上に直線 $\ell : y = tx$ と曲線 $C : y = \log x$ がある．次の問いに答えよ．

(1) ℓ が C と共有点をもたないとき，t のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) ℓ が C と接するとき，ℓ と C および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(3) 正の実数 a に対して，C 上の点 $\mathrm{A}(a,\ \log a)$ と ℓ の距離を $f(a)$ とおく．$f(a)$ の最小値を t を用いて表せ．

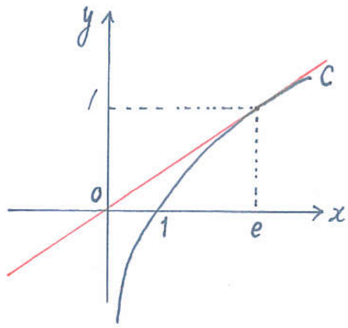
(1) $(\log x)' = \frac{1}{x}$ より．ℓ と C が接するときを考え．接点を $(s, \log s)$ $(s>0)$ とすると．

接線は．$y = \frac{1}{s}(x-s) + \log s$

$\therefore\ y = \frac{1}{s}x + \log s - 1$

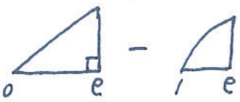
これが原点を通るので，$s = e$

$\therefore$ 接線は $y = \frac{1}{e}x$



$\therefore$ 共有点をもたないときの t の範囲は．$\underline{t > \frac{1}{e}}$ //

(2) (1) のグラフより．



$= \frac{1}{2}\cdot e \cdot 1 - \int_1^e (x)' \log x \, dx$

$= \frac{e}{2} - \left[x \log x\right]_1^e + \int_1^e dx$

$= \frac{e}{2} - e + e - 1$

$= \underline{\frac{e}{2} - 1}$ //

(3) $t \leqq \frac{1}{e}$ のときは C と ℓ は共有点をもつので $f(a)$ の最小値は 0

$t > \frac{1}{e}$ のときは．点と直線のキョリ公式より．

$f(a) = \frac{|at - \log a|}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{at - \log a}{\sqrt{t^2+1}}$　　$\therefore\ f'(a) = \frac{at-1}{a\sqrt{t^2+1}}$　　$\therefore\ f'(a) = 0$ となるのは．$a = \frac{1}{t}$ のとき

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{t}$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		↘		↗

$\therefore$ 最小値は $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1 + \log t}{\sqrt{t^2+1}}$

$\therefore$ $\underline{t \leqq \frac{1}{e} \text{ のとき } 0,\ t > \frac{1}{e} \text{ のときは } \frac{1+\log t}{\sqrt{t^2+1}}}$ //