2014年 基幹理工・創造理工・先進理工 第5問

5 Oを原点とする座標平面上に

放物線$C_1 : y = x^2$，円$C_2 : x^2 + (y-a)^2 = 1$　$(a \geqq 0)$

がある．C_2の点$(0,\ a+1)$における接線とC_1が2点A，Bで交わり，△OABがC_2に外接しているとする．次の問に答えよ．

(1) aを求めよ．

(2) 点$(s,\ t)$を$(-1,\ a)$，$(1,\ a)$，$(0,\ a-1)$と異なるC_2上の点とする．そして点$(s,\ t)$におけるC_2の接線とC_1との2つの交点を$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$とする．このとき，$(\alpha-\beta)^2 - \alpha^2\beta^2$は$s$，$t$によらない定数であることを示せ．

(3) (2)において，点$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$から$C_2$への2つの接線が再び$C_1$と交わる点を$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$，$\mathrm{R}(\gamma,\ \gamma^2)$とする．$\beta+\gamma$および$\beta\gamma$を$\alpha$を用いて表せ．

(4) (3)の2点Q，Rに対し，直線QRはC_2と接することを示せ．