2016年 理（数理科学）· 医 第1問　1枚目／2枚

1　n を自然数とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) α，β を実数とし，

$$f(x) = \frac{\alpha}{x-\alpha} - \frac{\beta}{x-\beta}$$

とする．$f(x)$ の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ について，次の等式が成り立つことを，数学的帰納法によって証明しなさい．

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{n+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{n+1}} \right\} \quad \cdots (*)$$

(2) b，c を $b^2 > 4c$ を満たす実数とし，

$$h(x) = \frac{x}{x^2 - bx + c}$$

とする．また，$h(x)$ の第 n 次導関数 $h^{(n)}(x)$ に対し，$a_n = \dfrac{c^n h^{(n)}(0)}{n!}$ とおく．

(i) 2次方程式 $x^2 - bx + c = 0$ の解を α，β とする．a_n を α，β，n を用いて表しなさい．

(ii) $a_{n+2} - ba_{n+1} + ca_n = 0$ が成り立つことを示しなさい．

(1) 数学的帰納法により (*) を示す

(i) $n=1$ のとき

$f(x) = \dfrac{\alpha}{x-\alpha} - \dfrac{\beta}{x-\beta}$ を微分して，$f'(x) = -\dfrac{\alpha}{(x-\alpha)^2} + \dfrac{\beta}{(x-\beta)^2}$

よって，$f^{(1)}(x) = (-1)^1 \cdot 1! \left\{ \dfrac{\alpha}{(x-\alpha)^2} - \dfrac{\beta}{(x-\beta)^2} \right\}$ となる.

したがって $n=1$ のとき (*) は成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると,

$f^{(k)}(x) = (-1)^k k! \left\{ \dfrac{\alpha}{(x-\alpha)^{k+1}} - \dfrac{\beta}{(x-\beta)^{k+1}} \right\}$ が成り立つ

さらに微分して，
$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^k k! \left\{ \frac{-\alpha(k+1)}{(x-\alpha)^{k+2}} - \frac{-\beta(k+1)}{(x-\beta)^{k+2}} \right\}$$
$$= (-1)^{k+1}(k+1)! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{k+2}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{k+2}} \right\}$$

∴ $n=k+1$ のとき (*) は成り立つ

(i), (ii) より すべての自然数 n について，(*) は成り立つ ▨

2枚目へつづく

2枚目／2枚

数理 石井K

(2) (i) $x^2-bx+c=0$ の判別式を D とすると，

$D=b^2-4c>0$ より，異なる2つの実数解をもつ

よって，α, β は実数であり，$x^2-bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できる．

$$h(x)=\frac{x}{x^2-bx+c}$$
$$=\frac{x}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{x-\alpha}-\frac{\beta}{x-\beta}\right)$$

(1) より，$h^{(n)}(x)=\dfrac{1}{\alpha-\beta}\cdot(-1)^n n!\left\{\dfrac{\alpha}{(x-\alpha)^{n+1}}-\dfrac{\beta}{(x-\beta)^{n+1}}\right\}$

$$\therefore\ h^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n n!}{\alpha-\beta}\left\{\frac{\alpha}{(-\alpha)^n\cdot(-\alpha)}-\frac{\beta}{(-\beta)^n\cdot(-\beta)}\right\}$$
$$=\frac{(-1)^n n!}{\alpha-\beta}\left\{-\frac{1}{(-\alpha)^n}+\frac{1}{(-\beta)^n}\right\}$$

$(-1)^n$ をかっこ内に入れて計算した

$$=\frac{n!}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\beta^n}-\frac{1}{\alpha^n}\right)$$

ここで，解と係数の関係より，$c=\alpha\beta$ であるから，

$$a_n=\frac{c^n h^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(\alpha\beta)^n}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\beta^n}-\frac{1}{\alpha^n}\right)=\underline{\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}}\ /\!/$$

(ii) 解と係数の関係より，$\alpha+\beta=b$，$\alpha\beta=c$ …①

$$a_{n+2}-ba_{n+1}+ca_n=\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}-(\alpha+\beta)\cdot\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}+\alpha\beta\cdot\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\left(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}-\alpha^{n+2}+\alpha\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}\beta+\beta^{n+2}+\alpha^{n+1}\beta-\alpha\beta^{n+1}\right)$$
$$=0 \quad ▨$$