



2016年理(数理科学)・医第1問

1枚目/2枚

数理
石井1 n を自然数とする。このとき、次の問いに答えなさい。(1) α, β を実数とし、

$$f(x) = \frac{\alpha}{x-\alpha} - \frac{\beta}{x-\beta}$$

とする。 $f(x)$ の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ について、次の等式が成り立つことを、数学的帰納法によって証明しなさい。

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{n+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{n+1}} \right\} \cdots (*)$$

(2) b, c を $b^2 > 4c$ を満たす実数とし、

$$h(x) = \frac{x}{x^2 - bx + c}$$

とする。また、 $h(x)$ の第 n 次導関数 $h^{(n)}(x)$ に対し、 $a_n = \frac{c^n h^{(n)}(0)}{n!}$ とおく。

(i) 2次方程式 $x^2 - bx + c = 0$ の解を α, β とする。 a_n を α, β, n を用いて表しなさい。(ii) $a_{n+2} - ba_{n+1} + ca_n = 0$ が成り立つことを示しなさい。

(1) 数学的帰納法により (*) を示す

(i) $n=1$ のとき

$$f(x) = \frac{\alpha}{x-\alpha} - \frac{\beta}{x-\beta} \text{ を微分して、 } f'(x) = -\frac{\alpha}{(x-\alpha)^2} + \frac{\beta}{(x-\beta)^2}$$

$$\text{よって、 } f^{(1)}(x) = (-1)^1 \cdot 1! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^2} - \frac{\beta}{(x-\beta)^2} \right\} \text{ となる。}$$

したがって $n=1$ のとき (*) は成り立つ。(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

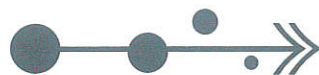
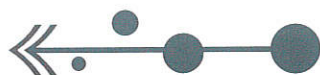
$$f^{(k)}(x) = (-1)^k k! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{k+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{k+1}} \right\} \text{ が成り立つ}$$

$$\text{さらに微分して、 } f^{(k+1)}(x) = (-1)^k k! \left\{ \frac{-\alpha(k+1)}{(x-\alpha)^{k+2}} - \frac{-\beta(k+1)}{(x-\beta)^{k+2}} \right\}$$

$$= (-1)^{k+1} (k+1)! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{k+2}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{k+2}} \right\}$$

 $\therefore n=k+1$ のとき (*) は成り立つ(i), (ii) より すべての自然数 n について、(*) は成り立つ \square

2枚目へつづく



2枚目/2枚

数理
石井

(2) (i) $x^2 - bx + c = 0$ の判別式を D とすると,

$D = b^2 - 4c > 0$ より, 異なる 2 つの実数解をもつ

よって, α, β は実数であり, $x^2 - bx + c = (x - \alpha)(x - \beta)$ と因数分解できる.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x}{x^2 - bx + c} \\ &= \frac{x}{(x - \alpha)(x - \beta)} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{x - \alpha} - \frac{\beta}{x - \beta} \right) \end{aligned}$$

(1) より, $h^{(n)}(x) = \frac{1}{\alpha - \beta} \cdot (-1)^n n! \left\{ \frac{\alpha}{(x - \alpha)^{n+1}} - \frac{\beta}{(x - \beta)^{n+1}} \right\}$

$$\therefore h^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n n!}{\alpha - \beta} \left\{ \frac{\alpha}{(-\alpha)^n \cdot (-\alpha)} - \frac{\beta}{(-\beta)^n \cdot (-\beta)} \right\}$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{\alpha - \beta} \left\{ -\frac{1}{(-\alpha)^n} + \frac{1}{(-\beta)^n} \right\}$$

$$= \frac{n!}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{\beta^n} - \frac{1}{\alpha^n} \right)$$

\downarrow $(-1)^n$ をかっこ内に入れて計算した

ここで, 解と係数の関係より, $c = \alpha\beta$ であるから,

$$a_n = \frac{c^n h^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(\alpha\beta)^n}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{\beta^n} - \frac{1}{\alpha^n} \right) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

(ii) 解と係数の関係より, $\alpha + \beta = b, \alpha\beta = c \dots \textcircled{1}$

$$a_{n+2} - b a_{n+1} + c a_n = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} - (\alpha + \beta) \cdot \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \alpha\beta \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta} \cdot \left(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2} - \alpha^{n+2} + \alpha\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\beta + \beta^{n+2} + \alpha^{n+1}\beta - \alpha\beta^{n+1} \right)$$

$$= 0 \quad \square$$