山口大学

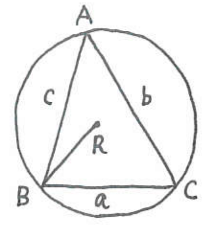
2016年 文系 第3問

3 △ABCにおいて，辺BC，CA，ABの長さをそれぞれ a，b，c で表すとき，次の問いに答えなさい．

(1) △ABCの外接円の半径を R とするとき，△ABCの面積を a，b，c，R を用いて表しなさい．

(2) △ABCの内接円の半径を r とするとき，△ABCの面積を a，b，c，r を用いて表しなさい．

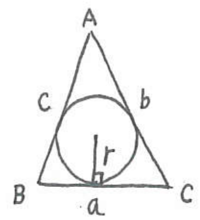
(3) △ABCの外接円と内接円の面積をそれぞれ S_1，S_2 とするとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ を a，b，c を用いて表しなさい．



(1) 正弦定理より．$\dfrac{a}{\sin A} = 2R \quad \therefore \sin A = \dfrac{a}{2R} \quad \cdots ①$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2}bc\sin A = \underline{\frac{abc}{4R}} \text{〃}$$

(2) $\triangle ABC = \underline{\dfrac{1}{2}r(a+b+c)}$ 〃



(3) 余弦定理より．$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad \cdots ②$

①，②より．$\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2 + \left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 = 1$

(注) ヘロンの公式を使うと
もう少し楽に計算できる

$$\therefore R^2 = \frac{a^2b^2c^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4}$$

$$= -\frac{a^2b^2c^2}{a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b+c)^2(b-c)^2}$$

$$= -\frac{a^2b^2c^2}{\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}}$$

$$= \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \quad \cdots ③$$

また，(1)，(2)より $\dfrac{abc}{4R} = \dfrac{1}{2}r(a+b+c)$ 　よって．$r^2 = \dfrac{a^2b^2c^2}{4R^2(a+b+c)^2} \quad \cdots ④$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{4R^4(a+b+c)^2}{a^2b^2c^2} \quad (\because ④より)$$

これに③を代入して．

$$\frac{S_1}{S_2} = \underline{\left\{\frac{2abc}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}\right\}^2} \text{〃}$$