



2018年理(数理科学)・医第3問

3 n を自然数とする。このとき、次の問いに答えなさい。

(1) 連続な関数 $f(x)$ が区間 $[0, 1]$ で増加するとき、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

が成り立つことを示しなさい。

(2) a が正の有理数のとき、

$$n^{a+1} \leq (a+1) \sum_{k=1}^n k^a \leq (n+1)^{a+1}$$

が成り立つことを示しなさい。ただし、 x^a が連続な関数であることを証明なしに用いてもよい。