



2018年理(数理科学)・医第3問

3  $n$  を自然数とする. このとき, 次の問いに答えなさい.

(1) 連続な関数  $f(x)$  が区間  $[0, 1]$  で増加するとき,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

が成り立つことを示しなさい.

(2)  $a$  が正の有理数のとき,

$$n^{a+1} \leq (a+1) \sum_{k=1}^n k^a \leq (n+1)^{a+1}$$

が成り立つことを示しなさい. ただし,  $x^a$  が連続な関数であることを証明なしに用いてもよい.