

2014年 理工学部 第3問

3  $a_1 = 0$ ,  $a_{n+1} = \log(a_n + e)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )で定まる数列  $\{a_n\}$  の収束について調べたい。以下の問いに答えなさい。

- (1) 方程式  $x = \log(x + e)$  は  $x > 0$  の範囲でただ1つの実数解  $\beta$  をもつことを証明しなさい。
- (2) すべての自然数  $n$  について  $0 \leq a_n < \beta$  が成り立つことを証明しなさい。
- (3)  $0 < a < b$  のとき  $\log b - \log a < \frac{b-a}{a}$  が成り立つことを証明しなさい。
- (4) すべての自然数  $n$  について  $\beta - a_{n+1} < \frac{1}{e}(\beta - a_n)$  が成り立つことを証明し、これを用いて  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta$  を示しなさい。