九州大学

2014年 理系 第2問

数理 石井K

2 以下の問いに答えよ．

(1) 任意の自然数 a に対し，a^2 を3で割った余りは0か1であることを証明せよ．

(2) 自然数 a, b, c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると，a, b, c はすべて3で割り切れなければならないことを証明せよ．

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ．

(1). (i). a が3の倍数のとき，$a=3k$ (k：整数) とおくと．

$a^2=9k^2$ ∴ a^2 を3で割った余りは0

(ii) a が3の倍数でないとき，$a=3k\pm1$ (k：整数) とおくと．

$a^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2k)+1$ ∴ a^2 を3で割った余りは1

(i). (ii) より．任意の自然数 a に対し，a^2 を3で割った余りは0か1 ■

(2) $a^2+b^2=3c^2$ より

右辺は3で割った余りが0なので

a^2+b^2 を3で割った余りは0

右の表より．a^2, b^3 を3で割った余りはともに0

a^2 \ b^2	0	1
0	0	1
1	1	2

a^2 と b^3 を3で割った余りとその和を3で割った余り

(1) より．a, b は3で割り切れる．

このとき，$a=3a'$, $b=3b'$ とおいて $a^2+b^2=3c^2$ に代入

すると，$3(a'^2+b'^2)=c^2$ となり．c も3の倍数　以上より題意は示された ■

背理法で示す。そのような a, b, c が存在したと仮定して．

(3) $a^2+b^2=3c^2$ をみたす a, b, c の中で，a の値が最小となるものを1つえらんでそれを a, b, c とする．

(2) より．a, b, c はすべて3で割り切れるので，$a=3a'$, $b=3b'$, $c=3c'$ とおく (a', b', c' は整数)

∴ $(3a')^2+(3b')^2=3(3c')^2$ より．$a'^2+b'^2=3c'^2$ となり．

a', b', c' も $a^2+b^2=3c^2$ の解となっている

さらに，$a'<a$ なので，a の最小性に矛盾する　∴ $a^2+b^2=3c^2$ をみたす自然数 a, b, c は存在しない ■