札幌医科大学

2014年 医学部 第2問

2 表と裏の出る確率が等しい硬貨を n 回投げる．このとき，表が出る回数が n の半分以上である確率を a_n とし，表が出る回数が n の半分より大きい確率を b_n とする．

(1) a_1, a_2, a_3 および b_1, b_2, b_3 をそれぞれ求めよ．

(2) $a_n - b_n$ を n を用いて表せ．

(3) a_n を n を用いて表せ．

(1) $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$

$n=2$ のとき．表が1回以上 … $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

1回より大きい … $\frac{1}{4}$

$\therefore a_2 = \frac{3}{4}$, $b_2 = \frac{1}{4}$

$n=3$ のとき 表が $\frac{3}{2}$ 回以上 $=\frac{3}{2}$ 回より大きい $\Big\}$ 2回以上．

$a_3 = b_3 = \frac{1}{2}$

(2) (i) n：奇数のとき $a_n = b_n$ より．$a_n - b_n = 0$

(ii) n：偶数のとき．$a_n - b_n$ はちょうど $\frac{n}{2}$ 回表が出る確率なので

$$a_n - b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot {}_n C_{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{2^n \cdot \left(\frac{n}{2}!\right)^2}$$

(3) (i) n：奇数のとき．表が k 回 $(0 \leqq k \leqq n)$ 出る確率と $n-k$ 回出る確率は等しいから $a_n = \frac{1}{2}$

(ii) n：偶数のとき 表がちょうど $\frac{n}{2}$ 回出るとき以外は(i)と同じだから．

$$a_n = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{n!}{2^n \cdot \left(\frac{n}{2}!\right)^2}\right\} + \frac{n!}{2^n \cdot \left(\frac{n}{2}!\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{n!}{2^{n+1}\left(\frac{n}{2}!\right)^2}$$