2016年 教育学部 第4問

数理 石井K

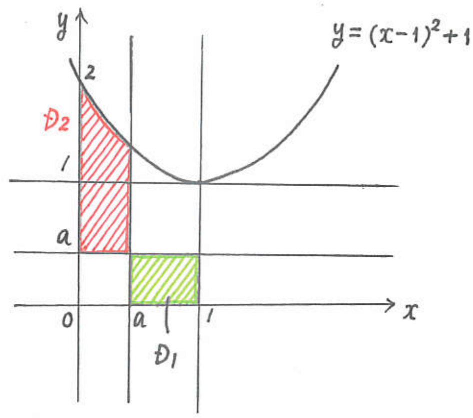
$\boxed{4}$ aを$0 < a < 1$である実数とする．座標平面において，直線$y = a$とx軸および2直線$x = a$，$x = 1$で囲まれた部分をD_1とし，曲線$y = (x-1)^2 + 1$と直線$y = a$および2直線$x = 0$，$x = a$で囲まれた部分をD_2とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 座標平面にD_1とD_2を図示せよ．

(2) D_1の面積S_1をaの式で表せ．

(3) D_2の面積S_2をaの式で表せ．

(4) $S = S_1 + S_2$とするとき，Sを最大にするaの値を求めよ．



(1) 右図のようになる．

(2) D_1は長方形で，$0 < a < 1$より

$$S_1 = (1-a)(a-0)$$
$$= \underline{a - a^2} \;//$$

(3)
$$S_2 = \int_0^a (x-1)^2 + 1 - a \, dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 + (1-a)x \right]_0^a$$
$$= \frac{1}{3}(a-1)^3 + (1-a)a + \frac{1}{3}$$
$$= \underline{\frac{1}{3}a^3 - 2a^2 + 2a} \;//$$

(4) $S = \frac{1}{3}a^3 - 3a^2 + 3a$

これを$S(a)$と表すと，$S'(a) = a^2 - 6a + 3$

$\therefore$ $S'(a) = 0$となるのは，$a = 3 \pm \sqrt{6}$

$0 < 3 - \sqrt{6} < 1$，$1 < 3 + \sqrt{6}$より増減表は次のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$3-\sqrt{6}$	$\cdots$	(1)	
$S'(a)$		$+$	0	$-$		
$S(a)$		$\nearrow$		$\searrow$		

よって，Sを最大にするaの値は，$\underline{a = 3 - \sqrt{6}} \;//$