

2017年工学部（中期）第3問

3 この問題は最短ネットワーク問題と呼ばれるものである。次の問いに答えなさい。

- (1) 図2のように長方形  $ABCD$  ( $AB = 2a$ ,  $AD = b$ ) において、点  $A$  から出発し、辺  $CD$  上の1点  $P$  ( $DP = x$ ) を経由して、点  $B$  に至るとき、経路長  $AP + PB$  が最小となるのは、点  $P$  が  $CD$  の中点 ( $x = a$ ) に位置するときであることを微分を利用して証明しなさい。
- (2) 図3のように長方形の頂点に位置する4つの町  $A, B, C, D$  ( $AB = 2a$ ,  $AD = 2b$  ( $b \geq a$ )) を結ぶ最短の道路網を作りたい。この問題を考えるとき、(1)の結果をふまえて対称性（上下、左右が対称である）を考慮すると、図3のように接続点  $E, F$  をつくり道路を作ることが考えられる（点  $G$  は  $AB$  の中点、点  $H$  は  $CD$  の中点、 $G, E, F, H$  は同一直線上にある）。このとき  $AB$  と  $AE$  のなす角を  $\theta$  として全道路長  $f(\theta) = AE + BE + EF + FD + FC$  を求めなさい。さらに  $f(\theta)$  を最小とする  $\theta$  を求めなさい。