2014年 工学部・生命環境（生命工）第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 楕円 $E : \dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$ および直線 $\ell : y = kx$ $(k > 0)$ とそれらの交点A，Bについて，次の問いに答えよ．

(1) 線分ABの長さを k を用いた式で表せ．

(2) 楕円 E 上の点Pでの接線が直線 ℓ に平行なとき，点Pの座標を k を用いた式で表せ．

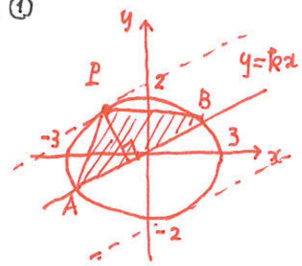
(3) 楕円 E 上の点Cを三角形ABCの面積が最大となる点とするとき，三角形ABCの面積を求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{k^2x^2}{4} = 1$ を解くと，$(9k^2+4)x^2 = 36$　$\therefore\ x = \pm\sqrt{\dfrac{36}{9k^2+4}} = \pm\dfrac{6}{\sqrt{9k^2+4}}$

∴ 右の図より．

$$AB = \sqrt{1+k^2}\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{9k^2+4}} + \frac{6}{\sqrt{9k^2+4}}\right)$$

$$= \underline{\frac{12\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{9k^2+4}}}\ //$$



(2) 接点を $(3\cos\theta,\ 2\sin\theta)$　$(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと 接線は

$\dfrac{3\cos\theta}{9}x + \dfrac{2\sin\theta}{4}y = 1$　∴ 傾きは，$-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = k$　…①

$k > 0$ であるから　$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$　または　$\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

①の両辺を2乗して．$4\cos^2\theta = 9k^2\sin^2\theta$　$\therefore\ (9k^2+4)\cos^2\theta = 9k^2$

$\therefore\ \cos^2\theta = \dfrac{9k^2}{9k^2+4}$　$\therefore\ \cos\theta = \dfrac{\pm 3k}{\sqrt{9k^2+4}}$，$\sin\theta = \dfrac{\mp 2}{\sqrt{9k^2+4}}$

$\therefore\ \underline{P\left(\dfrac{\pm 9k}{\sqrt{9k^2+4}},\ \dfrac{\mp 4}{\sqrt{9k^2+4}}\right)\ \text{(複号同順)}}\ //$

(3)．k を定数とみると 底辺ABに対して 高さが最大になるのは(2)のときである．

∴ 面積をSとおくと．点と直線のキョリ公式より．

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{12\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{9k^2+4}}\cdot\frac{\left|\dfrac{\pm 9k^2}{\sqrt{9k^2+4}} \pm \dfrac{4}{\sqrt{9k^2+4}}\right|}{\sqrt{k^2+1}} = \underline{6}\ //$$